前　　言

高等代数是数学专业的重要基础课，也是理工科大学各专业的重要教学工具课。初学时，往往感到内容抽象，做题困难，不易掌握，对一些问题不能进行深入的探讨。本书力图对高等代数，其中主要是线性代数的基本知识进行系统、透彻的分析，将知识加深加广提高一步。并且用大量的例题阐述应用基本知识解决问题的方法，从而提高读者分析解决问题的能力。

科学技术的发展日新月异，高等代数的知识也在不断地更新。本书试图引进一些新成果和新方法，以利开阔活跃思维培养创造力。

矩阵的知识有着非常广泛的应用，且与线性代数有着非常密切的关系。本书增添部分矩阵的基本知识。例如正规矩阵、矩阵的分解等。希望培养和提高读者应用矩阵的方法解决实际问题的能力。

掌握知识，有个循序渐进和反复学习的过程。考虑到学习的方便，本书还是采用了原来一般高等代数的知识系统，与北京大学数学力学系编的高等代数课本相吻合，但这里有对知识的综合运用。学习线性代数要特别注意掌握运用：初等变换与初等方阵的方法；分块矩阵的方法；线性子空间的方法；矩阵标准形的方法；同构转换的方法等。

本书是由十年来给数学系学生授课的讲义整理而成。并注意了博采众家之长。

本书可作为数学专业高等代数后继课的教材；可作为数学各专业考研究生的辅导教材；也可作为理工科各专业高等代数，线性代数的教学和科学研究的参考书。

本书的出版得到了李师正教授等同事的大力支持。历届众多的研究生对本书的出版给予了不少帮助。这里表示感谢！

水平所限，不当之处，在所难免，诚恳希望阅读者提出宝贵的意见。谢谢！

编著者

1994年6月于山东师范大学

目　　录

第一章　多项式

多项式是代数学中研究的最基本的对象之一，它不仅在学习代数及其它数学分支时有用，而且在解决实际问题时，也被广泛地应用.

一、数域 P 上的一元多项式环 $P[X]$

1. 形式定义多项式

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$a_i\in P$,　$i=0,1,2,\cdots,n$.　$f(x)\in P[x]$

多项式的项、系数、次数（记为 $\partial(f(x))$）以及多项式的相等的概念（参见北京大学《高等代数》课本 P4）.

由抽象代数，我们知道数域 P 上未定元 x 是存在的. 从而多项式环 $P[x]$ 亦是存在的.

2. 多项式的运算及其性质

（1）多项式加法（包括减法）、乘法定义.

（2）运算性质：加法、乘法满足结合律、交换律；乘法对加法满足分配律；乘法满足消去律.

（3）$P[x]$ 关于多项式的加法、乘法作成一个有单位元的可换环.

$P[x]$ 是一个欧氏环，是主理想环，是唯一分解环，是整环.

二、多项式的整除性

1. 带余除法

对于 $f(x),g(x)\in P[x]$，其中 $g(x)\neq 0$ 时，则唯一存在 $q(x),r(x)\in P[x]$，使得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$，称 $q(x)$ 为商式，$r(x)$ 为余式.

例 1 一个多项式 $f(x)$ 可以唯一地表示成另一个多项式 $g(x)$，$(\partial(g(x))\geqslant 1)$ 的多项式

即：$f(x)=r_m(x)g^m(x)+r_{m-1}(x)g^{m-1}(x)+\cdots$

$$+r_1(x)g(x)+r_0(x) \tag{1}$$

其中 $r_i(x)\in P[x]$， $r_i(x)=0$ 或 $\partial(r_i(x))<\partial(g(x))$

$i=0,1,2,\cdots,m$，且这种表示法是唯一的.

证明 先证存在性：

由带余除法知：存在 $q_0(x),r_0(x)\in P[x]$，使得

$$f(x)=g(x)q_0(x)+r_0(x) \tag{2}$$

$r_0(x)=0$ 或 $\partial(r_0(x))<\partial(g(x))$

当 $\partial(q_0(x))<\partial(g(x))$ 时，结论成立.

当 $\partial(q_0(x))\geqslant\partial(g(x))$ 时，又由带余除法知，

存在 $q_1(x),r_1(x)\in P[x]$，使得

$$q_0(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x) \tag{3}$$

这里 $r_1(x)=0$ 或 $\partial(r_1(x))<\partial(g(x))$ 此时，若 $\partial(q_1(x))<\partial(g(x))$，则将(3)代入(2)得：

$f(x)=g(x)[g(x)q_1(x)+r_1(x)]+r_0(x)$

$=q_1(x)g^2(x)+r_1(x)g(x)+r_0(x)$ 即结论成立.

若 $\partial(q_1(x))\geqslant\partial(g(x))$，再用 $g(x)$ 去除 $q_1(x)$ 得商式

$q_2(x)$，余式 $r_2(x)$，如此进行下去可得：$q_0(x),q_1(x),q_2(x)$，…，它们的次数都是逐渐降低的.

由 $f(x)$次数有限，故这种除的过程经有限步骤后即可得到所证的结论.

再证唯一性：

设另有 $f(x)=S_k(x)g^k(x)+S_{k-1}(x)g^{k-1}(x)+\cdots$

$$+S_1(x)g(x)+S_0(x) \tag{4}$$

其中 $S_i(x)=0$ 或 $\partial(S_i(x))<\partial(g(x))$，　$i=0,1,\cdots,k$，

(1)—(4)并移项得：

$$[r_m(x)g^{m-1}(x)-S_k(x)g^{k-1}(x)+\cdots+(r_1(x)-S_1(x)]g(x)$$
$$=S_0(x)-r_0(x)$$

比较等式两端次数的关系得：$S_0(x)=r_0(x)$

$$\therefore\quad [r_m(x)g^{m-1}(x)-S_k(x)g^{k-1}(x)+\cdots+(r_1(x)$$
$$-S_1(x))]=0$$

$$\therefore\quad [r_m(x)g^{m-2}(x)-S_k(x)g^{k-2}(x)+\cdots+(r_2(x)$$
$$-S_2(x)]$$

$$g(x)=S_1(x)-r_1(x)$$

同理可得 $S_1(x)=r_1(x)$，如此进行下去可得

$S_2(x)=r_2(x),\cdots,S_m(x)=r_m(x)$.

例 2　将 $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$ 按 $g(x)=x+1$ 的方幂展开.

解　$f(x)=b_0g^4(x)+b_1g^3(x)+b_2g^2(x)+b_3g(x)+b_4$

可用综合除法：

1	2	−3	−4	1	−1
	−1	−1	4	0	

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & 1 & -4 & 0 & 1=b_4 \\
 & -1 & 0 & 4 & \\
\hline
1 & 0 & -4 & \multicolumn{1}{|l}{4=b_3} & \\
 & -1 & 1 & \multicolumn{1}{|l}{} & \\
\cline{1-3}
1 & -1 & \multicolumn{1}{|l}{-3=b_2} & & \\
 & -1 & \multicolumn{1}{|l}{} & & \\
\cline{1-2}
\end{array}
$$

$1=b_0, -2=b_1$

$\therefore f(x)=(x+1)^4-2(x+1)^3-3(x+1)^2+4(x+1)+1$

2. 整除的定义及性质

定义 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $h(x)\in P[x]$，使 $f(x)=g(x)h(x)$，称 $g(x)\mid f(x)$

知 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 的充要条件是以 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得余式为 0.

性质 (1) $f(x)\mid g(x)$ 且 $g(x)\mid f(x)\Longleftrightarrow$ 存在 $C\in P$，$C\neq 0$ 时，使 $f(x)=Cg(x)$

(2)(传递性)若 $f(x)\mid g(x),g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$

(3)若 $g(x)\mid f_i(x)\quad i=1,2$，则 $g(x)\mid[f_1(x)\pm f_2(x)]$

推广：若 $g(x)\mid f_i(x)$，$\quad i=1,2,\cdots,r$，则

$$g(x)\mid \sum_{i=1}^{r}u_i(x)f_i(x),\quad \forall\, u_i(x)\in P[x]$$

(4)设 $f(x)=g(x)q(x)+h(x)t(x)$，若 $S(x)\mid g(x)$，$S(x)\mid h(x)$，则 $\forall\, q(x),t(x)\in P[x]$，均有 $S(x)\mid f(x)$，但反之，不一定成立.

例 3 设 $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x)\in P[x]$，

$$(x^n-a)\mid\sum_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i,\quad a\in P,a\neq 0$$

则 $(x-a)\mid f_i(x),\quad i=0,1,\cdots,n-1$

证明 由带余除法，$f_i(x)=(x-a)q_i(x)+r_i,\quad r_i\in P$

$\therefore f_i(x^n)=(x^n-a)q_i(x^n)+r_i$

$$\therefore\sum_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i=\sum_{i=0}^{n-1}(x^n-a)q_i(x^n)x^i+\sum_{i=0}^{n-1}r_ix^i$$

有 $(x^n-a)\mid\sum_{i=0}^{n-1}r_ix^i$

必有 $\sum_{i=0}^{n-1}r_ix^i=0$，即 $r_i=0,\quad i=0,1,\cdots,n-1$

因此有 $(x-a)\mid f_i(x),\quad i=0,1,\cdots,n-1.$

例 4 设 $f(x)=x^{3m}-x^{3n+1}+x^{3p+2},\quad g(x)=x^2-x+1$，其中 m,n,p 为非负整数，则 $g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 m,n,p 具有相同的奇偶性.

证明 $\Longrightarrow$ 若 $g(x)\mid f(x)$，则存在 $q(x)\in P[x]$ 使 $f(x)=g(x)q(x)$

$g(x)=x^2-x+1$ 的二根为 $W_1=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，

$W_2=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 且 $W_1^3=-1,\quad W_2^3=-1$

则有 $f(W_1)=(-1)^m-(-1)^nW_1+(-1)^pW_1^2=0$

$f(W_2)=(-1)^m-(-1)^nW_2+(-1)^pW_2^2=0$

二式相加得： $2(-1)^m-(-1)^n\cdot 1+(-1)^p(-1)=0$

$(\because W_1+W_2=1,\quad W_1{}^2+W_2{}^2=-1)$

即有 $2(-1)^m=(-1)^n+(-1)^p.$

当 m 为奇数时，则 n、P 必为奇数，

当 m 为偶数时，则 n、p 必为偶数.

$\Longleftarrow$ 当 m,n,p 同为奇数或同为偶数时，则 $g(x)$的根 W_1,W_2 亦为 $f(x)$的根.

故有$(x-W_1)|f(x)$， $(x-W_2)|f(x)$

$\because ((x-W_1),(x-W_2))=1$

$\therefore (x-W_1)(x-W_2)=g(x)$， $g(x)|f(x)$

例 5 证明：$(x^m-a^m)|(x^n-a^n)\Longleftrightarrow m|n$，

$a\neq 0$， m,n 为自然数.

证明 由整数的带余除法知，$n=mq+r$， $r=0$ 或 $r<m$，

$\therefore x^n-a^n=x^{mq}x^r-a^{mq}a^r=x^{mq}x^r-x^ra^{mq}+x^ra^{mq}-a^{mq}a^r$

$=x^r(x^{mq}-a^{mq})+a^{mq}(x^r-a^r)$

而 $x^{mq}-a^{mq}=(x^m)^q-(a^m)^q$

$=(x^m-a^m)(x^{m(q-1)}+x^{m(q-2)}a^m+\cdots+a^{m(q-1)})$

代入上式可知用 x^m-a^m 除 x^n-a^n 的商式

为 $x^r(x^{m(q-1)}+x^{m(q-2)}a^m+\cdots+a^{m(q-1)})$

而余式为 $a^{mq}(x^r-a^r)$

因此 $(x^m-a^m)|(x^n-a^n)\Longleftrightarrow a^{mq}(x^r-a^r)=0$

$\Longleftrightarrow r=0\Longleftrightarrow m|n$

三、最大公因式、最小公倍式

1. 最大公因式的定义及判别条件

定义 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $d(x)\in P[x]$，使 $d(x)|f(x)$， $d(x)|g(x)$，且$\forall\ t(x)\in P[x]$，

若有 $t(x)|f(x)$，$t(x)|g(x)$，

则必有 $t(x)|d(x)$，称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式，记为 $(f(x),g(x))=d(x)$ （首项系数为 1）

判别条件

(1)首项系数为 1 的多项式 $d(x)$ 若是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $\Longleftrightarrow d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式中的次数最高者，且 $d(x)$ 的首项系数为 1.

(请读者自证)

(2) $(f(x),g(x))=d(x)\Longleftrightarrow d(x)$ 为形如

$f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=d(x)$ 的多项式中次数最低者且首项系数为 1. $\varphi(x),\psi(x)$ 可为 $P[x]$ 中任意多项式.

证明 $\Longrightarrow$ 若 $(f(x),g(x))=d(x)$，则存在 $\varphi(x),\psi(x)\in P[x]$，使 $f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=d(x)$， 若还有

$f(x)\varphi_1(x)+g(x)\psi_1(x)=r(x)$，且 $\partial(r(x))<\partial(d(x))$

但由 $d(x)|f(x),d(x)|g(x)$，知 $d(x)|r(x)$ 矛盾.

$\Longleftarrow d(x)$ 是形如 $f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)=d(x)$ 中次数最低者，我们证明 $d(x)|f(x)$

否则有 $f(x)=d(x)q(x)+r(x)$,

$r(x)\neq 0$, $\partial(r(x))<\partial(d(x))$

则 $f(x)-d(x)q(x)=r(x)$

$f(x)-[f(x)\varphi(x)+g(x)\psi(x)]q(x)=r(x)$

即 $f(x)[1-\varphi(x)q(x)]+g(x)[-\psi(x)q(x)]=r(x)$

这与假设矛盾，故 $d(x)|f(x)$.

同理 $d(x)|g(x)$，且 $d(x)$ 能被 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的其他公因子整除，所以 $(f(x),g(x))=d(x)$.

2. 最大公因式的性质

(1) $\forall\ f(x),g(x)\in P[x]$，则存在 $u(x)$， $v(x)\in P[x]$，使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$

这样的 $u(x),v(x)$ 不是唯一存在的.

这是因为，若令 $u_1(x)=u(x)+g(x)t(x)$

$v_1(x)=v(x)-f(x)t(x)$，而 $\forall\ t(x)\in P[x]$，均有

$$f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=(f(x),g(x))$$

(2) 设 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$， 则

$$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$$

(3) $(f(x),g(x))=(f(x)+g(x),f(x)-g(x))$

(4) $(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$

(5) $(f_1(x),g_1(x))(f_2(x),g_2(x))$

$=(f_1(x)f_2(x),f_1(x)g_2(x),f_2(x)g_1(x),g_1(x)g_2(x))$

(6) $(f_1(x),f_2(x),f_3(x))=((f_1(x),f_2(x)),f_3(x))$

(7) $(f(x),g(x))^n=(f^n(x),g^n(x))$

(以上请读者自证)

3. 互素多项式

定义及判别条件

定义 若 $(f(x),g(x))=1$，称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

判别条件 $(f(x),g(x))=1\Longleftrightarrow$ 存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

性质. (1) 若 $(f(x),h(x))=1$， $(g(x),h(x))=1$

$\Longleftrightarrow(f(x)g(x),h(x))=1$

(2) 若 $(f(x),g(x))=1$，则 $(f^m(x),g^m(x))=1$，$(f(x^m),g(x^m))=1$

(3) $(f(x),g(x))=1 \Longleftrightarrow (f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$（提示：$(f,f+g)=1,(g,f+g)=1$，然后用(1)）

(4)若 $f(x)\mid g(x)h(x)$ 且 $(f(x),g(x))=1$，

则 $f(x)\mid h(x)$

(5)若 $f(x)\mid g(x),h(x)\mid g(x)$，且 $(f(x),h(x))=1$

则 $f(x)h(x)\mid g(x)$

注意：(4)，(5)中，条件 $(f(x),g(x))=1$ 缺了不行.

4. 最小公倍式

定义 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $m(x)\in P[x]$，使 $f(x)\mid m(x),g(x)\mid m(x)$，且 $m(x)$ 能整除 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公倍式，称 $m(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式，记为 $[f(x),g(x)]=m(x)$，$[f(x),g(x)]$ 的首项系数为1，首项系数为1的 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式当且仅当 $m(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公倍式中次数最低者.

性质 (1)若 $(f(x),g(x))=d(x)$，

$f(x)=d(x)f_1(x),\quad g(x)=d(x)g_1(x)$，

则 $[f(x),g(x)]=d(x)f_1(x)g_1(x)$.

证明 $f(x)\mid d(x)f_1(x)g_1(x)$，

$g(x)\mid d(x)f_1(x)g_1(x)$

若有 $S(x)$ 使 $f(x)\mid S(x),\quad g(x)\mid S(x)$，则 $d(x)\mid S(x)$，

$\therefore\ S(x)=d(x)S_1(x)$，有 $f_1(x)\mid S_1(x),\quad g_1(x)\mid S_1(x)$，由 $(f_1(x),g_1(x))=1$，得 $f_1(x)g_1(x)\mid S_1(x)$

即有 $d(x)f_1(x)g_1(x)\mid d(x)S_1(x)$，

$\therefore\ [f(x),g(x)]=d(x)f_1(x)g_1(x)$

(2) $(f(x),g(x))[f(x),g(x)]=f(x)g(x)$，即有

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}$$ （证略）

(3)若 $f(x)|m(x),g(x)|m(x)$.

则 $[f(x),g(x)]=m(x)\Longleftrightarrow(\frac{m(x)}{f(x)},\frac{m(x)}{g(x)})=1$

(4)$[f(x),g(x)]h(x)=[f(x)h(x),g(x)h(x)]$,

($h(x)$首项系数为 1)

四、因式分解

1. 不可约多项式的定义及性质

定义 $p(x)\in P[x],\partial(p(x))\geq 1,p(x)$不能表成 $P[x]$中两个次数比 $\partial(p(x))$低的多项式的乘积，称 $p(x)$在 P 上不可约.

性质 (1)数域 P 上不可约多项式 $p(x)$与 $P[x]$中任意多项式 $f(x)$的关系是：或者$(p(x),f(x))=1$，或者

$p(x)|f(x)$. 反之，亦然.

(2)设 $p(x)$为数域 P 上的不可约多项式，则$\forall f(x)$,

$g(x)\in P[x]$，由 $p(x)|f(x)g(x)$可推得 $p(x)|f(x)$或

$p(x)|g(x)$.

推广：$p(x)|\prod_{i=1}^{m}f_i(x)$，则 $p(x)$至少整除某个 $f_i(x)$.

2. 因式分解及唯一性定理

(1)数域 P 上每个次数大于 1 的多项式 $f(x)$，都可以唯一地分解为 P 上不可约多项式的乘积

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$$

此定理在理论上是重要的，但并没有给出具体分解方法. 实际上将一个具体多项式分解成不可约多项式之乘积是比较困

难的.

(2)几种数域上多项式的因式分解.

①复数域 C 上的不可约多项式只有一次的,因此次数大于或等于 1 的复系数多项式都能分解为一次因式之积.

②实数域 R 上的不可约多项式只有一次的及有一对共轭虚根的二次三项式:x^2+px+q,$(p^2-4q<0)$,因此实系数多项式都能分解成一次因式和二次不可约多项式之积.

③有理数域 Q 上不可约多项式可以是任意次的.

例如　$f(x)=x^n+2$,　n 可为任意自然数

x^n+2 在 Q 上不可约.

艾森斯坦因(Eisenstein)判别法是用来判别整系数多项式在有理数域上不可约的充分条件,但不是必要条件.

五、多项式的根,n 次单位根

1. 从函数的观点来说多项式——多项式函数

(1)α 是 $f(x)$的根$\Longleftrightarrow f(\alpha)=0 \Longleftrightarrow (x-\alpha)\mid f(x)$.

(2)$P[x]$中 n 次多项式 $f(x)(n\geqslant 0)$,在 P 中至多有 n 个根(重根按重数计算).

(3)两个多项式函数相等当且仅当它们的形式相同,这是待定系数法的理论根据.

(4)根与系数之间的关系——韦达定理.

$$
\begin{aligned}
f(x)&=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\\
&=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\
\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\
\cdots\cdots \\
\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}
\end{cases}
$$

(5)拉格朗日(Lagrange)插值公式.

给定数域 P 上 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots a_{n+1}$ 以及任意 $n+1$ 个数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}\in P$,至多存在一个多项式 $f(x)$,使 $f(a_i)=b_i$, $i=1,2,\cdots,n+1$

$$
f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_{n+1})}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_{n+1})}
$$

2. 方程的变换

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的根为 $x_1,\cdots,x_n$

(1)根负变换:以 $-x_1,-x_2,\cdots,-x_n$ 为根的多项式为

$$
g_1(y)=a_ny^n-a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-i}a_iy^i+\cdots+(-1)^{n-1}a_1y+(-1)^na_0
$$

(2)根乘数变换:以 $Kx_1,Kx_2,\cdots,Kx_n$ 为根的多项式为

$$
g_2(y)=a_ny^n+Ka_{n-1}y^{n-1}+\cdots+K^{n-1}a_1y+K^na_0
$$

(3)根减数变换:以 $x_1-c,x_2-c,\cdots,x_n-c$ 为根的多项式是 $g_3(y)=b_ny^n+b_{n-1}y^{n-1}+\cdots+b_1y+b_0$

这里 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_1,b_0$ 是将 $f(x)$ 表成 $x-c$ 的多项式的系数,即

$$
f(x)=b_n(x-c)^n+b_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+b_1(x-c)+b_0
$$

(4)根倒数变换:以 $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},\cdots,\dfrac{1}{x_n}$ 为根的多项式是

$g_4(y) \doteq a_0y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}y + a_n$

3. 重因式

定义 不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 k 重因式,如果 $p^k(x) | f(x)$,而 $p^{k+1}(x) \nmid f(x)$.

性质 (1)多项式 $f(x)$ 无重因式 $\Longleftrightarrow (f(x), f'(x)) = 1$.

(2) $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 与 $f(x)$ 有相同的不可约单因子.

注意:$f'(x)$ 的不可约因子,不一定是 $f(x)$ 的重因式

例如,$f(x) = x^2 - 4x + 2$, $f'(x) = 2(x-2)$

$x-2$ 是 $f'(x)$ 的单因式,$x-2$ 不是 $f(x)$ 的因式

我们可以分离多项式的重因式(可参考有关高等代数书)以利于因式分解,以利于求根.

4. 代数基本定理

每个次数大于或等于 1 的复系数多项式在复数域中有一根.

5. n 次单位根

定义 数 1 在复数范围内的 n 次方根,称为 n 次单位根. 亦即多项式 $x^n - 1$ 的根.

设 ε 是一个 n 次单位根,若 $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \cdots, \varepsilon^n$ 为全部 n 次单位根,则称 ε 为本原 n 次单位根.

性质 (1)全部 n 次单位根,对于数的乘法作成群.

(2)设 ε 是一个 n 次单位根,则 ε 是 n 次原根的充要条件是对于 $1 \leqslant m < n$ 的自然数 m,都有 $\varepsilon^m \neq 1$,(即 ε 不是低于 n 次的单位根).

证明 必要性显然

充分性:证 $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}$ 互不相等即可. 否则,若有

$\varepsilon^s=\varepsilon^t,(1\leqslant t<s<n)$，　有　$\varepsilon^{s-t}=1$，　$1\leqslant s-t<n$，矛盾.

(3)设 $d_1,d_2,\cdots,d_t$ 为 n 的全体正因数(包括 1)，则全体 d_i　$(i=1,\cdots,t)$次原根，就是全体 n 次单位根。

证明　一方面，设 ε 是任一 d_i 次原根，

则　$\varepsilon^{d_i}=1,\varepsilon^n=1,(\because d_i|n)$

另一方面，设 ε 为任一 n 次单位根，$\varepsilon^n=1$

设 d 是使 $\varepsilon^d=1$ 的最小自然数，$n=dq+r$，

$\varepsilon^n=\varepsilon^{dq+r}=\varepsilon^r=1$，必 $r=0$

即　$d|n$，　ε 是 d 次原根.

(4)设 ε 是 n 次原根，则 ε^k 是一个$\frac{n}{(k,n)}$次原根.

证明　设$(k,n)=d$，　$k=dk_1$，　$n=dn_1$，

$(\varepsilon^k)^{n_1}=\varepsilon^{kn_1}=\varepsilon^{nk_1}=1$.

又若有$(\varepsilon^k)^m=1$，　$n|km$，　$n_1|k_1m$，

$\because(n_1,k_1)=1$，　$\therefore n_1|m$，故 $m>n_1=\frac{n}{(k,n)}$，　因此，由(2)

ε^k 是$\frac{n}{(k,n)}$次原根.

(5)ε 是一个 n 次原根，则 ε^k 亦是 n 次原根的充要条件是 $(k,n)=1$　(用(4)证)

推论　n 次原根的个数 $\varphi(n)$就是小于 n 且与 n 互素的自然数的个数，若 n 的标准分解式为 $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_t^{r_t}$，则

$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_t})$　(证略)

6. 实数域上多项式的求根问题

一、二、三、四次多项式有求根公式，一般说来，五次以上的多项式不能公式解. 但是，可用施图姆方法及牛顿法等，求多项式实根的精确到任意程度的近似值.

7. 求有理系数多项式的有理根的问题可以转化为求整系数多项式的有理根

（这是因为 $g(x)=cf(x)$，$c\neq 0$ 时，$g(x)$ 与 $f(x)$ 的根相同）

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，若有既约分数 r/s 使 $f(\frac{r}{s})=0$，则 $r|a_0$，$s|a_n$

特别，当 $a_n=1$ 时，$f(x)$ 的有理根都是整数且为 a_0 的因子.

此结论给出了一个 $f(x)$ 的有理根的范围，可用综合除法逐个分析试验. 下面考虑缩小试验范围.

若既约分数 $\frac{r}{s}$ 使 $f(\frac{r}{s})=0$， $f(x)$ 是整系数多项式，则 $(r-ms)|f(m)$.

证明 令 $x=y+m$

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$f(y+m)=a_ny^n+c_{n-1}y^{n-1}+\cdots+c_1y+c_0=g(y)$

$g(o)=f(m)=c_0$

$f(y+m)=a_n(x-m)^n+c_{n-1}(x-m)^{n-1}+\cdots+c_1(x-m)+c_0=q(x)=f(x)$.

$q(\frac{r}{s})=f(\frac{r}{s})=a_n(\frac{r}{s}-m)^n+c_{n-1}(\frac{r}{s}-m)^{n-1}+\cdots+c_1(\frac{r}{s}-m)+c_0=0$

有 $a_n(r-ms)^n+c_{n-1}s(r-ms)^{n-1}+\cdots+c_1s^{n-1}(r-ms)=-c_0s^n$

由上式可知 $(r-ms)|c_0s^n$

$\because ((r-ms),s)=1 \quad \therefore ((r-ms),s^n)=1$

故 $(r-ms)|c_0=f(m)$

特别情形：当 $m=1$ 时，有 $(r-s)|f(1)$

当 $m=-1$ 时，有 $(r+s)|f(-1)$

这样在 ±1 不是 $f(x)$ 的根时，可以缩小有理根的试验范围，即只须验证，使 $(r-s)|f(1)$，$(r+s)|f(-1)$ 的 $\frac{r}{s}$ 即可.

$(s|a_n, r|a_0)$

例 6 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$a,b,c\in Z$（整数集），若 $ac+bc$ 为奇数，则 $f(x)$ 无整数根.

证明 若 $f(x)$ 有整数根 α，$f(\alpha)=0$，$\alpha|c$

$\because$ $ac+bc=(a+b)c$ 为奇数，则 $a+b$ 与 c 均为奇数，α 亦为奇数.

又 $(\alpha-1)|f(1)=1+a+b+c$

$1+a+b+c=f(1)$ 是奇数，因而 $\alpha-1$ 是奇数，故 α 是偶数. α 既是奇数，又是偶数；不可能.

因而，$f(x)$ 无整数根.

例 7 设 $f_i(x)(i=1,\cdots,n)$ 是数域 P 上的多项式，证明 $(x^n+\cdots+x+1)|[x^{n-1}f_1(x^{n+1})+x^{n-2}f_2(x^{n+1})+\cdots+xf_{n-1}(x^{n+1})+f_n(x^{n+1})]$ 的充分必要条件是 $(x-1)|f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$

证明 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 的根 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $n+1$ 次单位根，$\varepsilon_i\neq1$，不妨设 ε_1 是 $n+1$ 次原根，$\varepsilon_1^i=\varepsilon_i$

则， $\varepsilon_i^{n-1}f_1(1)+\varepsilon_i^{n-2}f_2(1)+\cdots+\varepsilon_if_{n-1}(1)+f_n(1)=0$

$\Longleftrightarrow f_i(1)=0$（齐次线性方程组系数行列式是范德蒙行列式不为零，只有零解）

$\Longleftrightarrow (x-1)|f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$

例 8 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_m$ 是 m 个在有理数域 Q 上线性无关的复数，$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x),g(x)\in Q[x]$，且 $g(x)$ 在 Q 上不可约.

证明 若对于 $g(x)$ 的每个根 α 均有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(\alpha)=0$，则 $g(x)\mid f_i(x)$， $i=1,2,\cdots m$

证明 $\because g(x)$ 在 Q 上不可约， $\therefore g(x)\neq 0$

由带余除法： $f_i(x)=g(x)q_i(x)+r_i(x)$

$r_i(x)=0$ 或 $\partial(r_i(x))<\partial(g(x))$

只须证 $r_i(x)=0$ 即可， 令 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(x)$，则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g(x)q_i(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i r_i(x)$$

$$\because \quad g(\alpha)=0 \quad \therefore f(\alpha)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i r_i(\alpha)=0$$

$g(x)$ 在 Q 上不可约，$(g(x),g'(x))=1$， $g(x)$ 无重根，

故 $g(x)\mid \sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i r_i(x)$

而 $\partial(\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i r_i(x))<\partial(g(x))$，必 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i r_i(x)=0$

若 $r_i(x)$ 不全是零多项式，例如 $r_2(x)\neq 0$，存在有理数 β 使

$r_2(\beta)\neq 0$，有 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i r_i(\beta)=0$

此与 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 在 Q 上线性无关矛盾，

故必 $r_i(x)\equiv 0$， $i=1,2,\cdots,m$. <证完>

例 9 设 α 是一个复数，P 是数域，则

$M=\{f(\alpha)\mid f(x)\in P[x]\}$ 是数域的充要条件是存在

$s(x)\in P[x]$， $\partial(s(x))>0$，使 $s(\alpha)=0$

证明 $\Longrightarrow$ M 是数域，若 $\alpha=0$，则 $M=P$，取 $s(x)=x$ 即可. 若 $\alpha\neq 0$，$\because x\in P[x]$ $\therefore f(\alpha)\in M$， $\frac{1}{\alpha}\in M$，存在

$t(x)\in P[x]$，使 $t(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$， $\alpha t(\alpha)-1=0$

故 α 为 $xt(x)-1=s(x)$的根.

$\Longleftarrow$ $\because 0,1\in P[x]$. $0(\alpha)=0$. $1(\alpha)=1$ $\in M$

$\forall f_1(\alpha),f_2(\alpha)\in M$， 有 $f_1(x),f_2(x)\in P[x]$

$\because f_1(x)\pm f_2(x)\in P[x]$， $f_1(x)f_2(x)\in P[x]$

$\therefore f_1(\alpha)\pm f_2(\alpha)$， $f_1(\alpha)f_2(\alpha)\in M$，

设 $P[x]$中以 α 为根，首项系数为 1，且次数最低者是 $g(x)$，则 $g(x)$在 $P[x]$中不可约.

否则 $g(x)=g_1(x)g_2(x)$， $\partial(g_i(x))<\partial(g(x))$.

有 $g(\alpha)=g_1(\alpha)g_2(\alpha)=0$，必有一个 $g_i(\alpha)=0$，与 $g(x)$次数最低矛盾.

$\forall f_1(\alpha),f_2(\alpha)\in M$， $f_2(\alpha)\neq 0$

$f_2(x)=g(x)q(x)+r(x)$， $r(x)=0$ 或

$\partial(r(x))<\partial(g(x))$

$(r(x),g(x))=1$，($\because f_2(\alpha)=g(\alpha)q(\alpha)+r(\alpha)\neq 0$)

存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使 $r(x)u(x)+g(x)v(x)=1$

以 α 代 x， $r(\alpha)u(\alpha)=1$

$r(\alpha)=\frac{1}{u(\alpha)}$ 故 $\frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}=\frac{f_1(\alpha)}{r(\alpha)}=f_1(\alpha)u(\alpha)\in M$

因此，M 是数域.

六、多元多项式环，对称多项式子环

1. 多元多项式表达式的字典排列法（参阅北京大学编《高等代数》第二版 P35）

$P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$对多元多项式的加法，乘法作成环. 首项定理：乘积的首项是因子首项的乘积.

2. 对称多项式

定义 经过变量的任意对换恒不变的多项式称为对称多项式.

初等对称多项式：

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sigma_n=x_1x_2\cdots x_n\end{cases}$$

(1)对称多项式的基本定理：任意对称多项式 $f(x_1,\cdots x_n)$均可表为初等对称多项式的多项式，即存在 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 使 $f(x_1,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$

具体做法：对齐次对称式可用待定系数法；对于非齐次对称式，可将其分解成几个齐次对称式之和，然后再分别将每个齐次部分用待定系数法化之.

(2)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $P[x]$中 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$ 的根，则 $P[\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n]$中的对称式 $g(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$可表为 $\varphi(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in P$，又 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 的对称式 $h(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$可以表成 α_1 的多项式 $f_1(\alpha_1)\in P[\alpha_1]$

证明 设 τ_k 为 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 的 k 次初等对称式，

σ_k 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的 k 次初等对称式，则有

$\tau_k=\sigma_k-\alpha_1\tau_{k-1}$

$=\sigma_k-\alpha_1[\sigma_{k-1}-\alpha_1\tau_{k-2}]=\sigma_k-\alpha_1\sigma_{k-1}+\alpha_1^2\tau_{k-2}$

$=\sigma_k-\alpha_1\sigma_{k-1}+\alpha_1^2[\sigma_{k-2}-\alpha_1\tau_{k-3}]\quad =\cdots\quad\cdots\quad\cdots$

$=\sigma_k-1_1\sigma_1+(-1)^k\alpha_1^k$

$=(-1)^k[(-1)^k\sigma_k+(-1)^{k-1}\alpha_1\sigma_{k-1}+\cdots$

$+(-1)^2\alpha_1^{k-2}\sigma_2+(-1)\alpha_1^{k-1}\sigma_1+\alpha_1^k]$

$=(-1)^k[b_k+b_{k-1}\alpha_1+b_{k-2}\alpha_1^2+\cdots+b_1\alpha_1^{k-1}+\alpha_1^k]$

因此，$h(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\psi(\tau_1,\cdots,\tau_{n-1})=f_1(\alpha_1)\in P[\alpha_1]$

(3)(接上)称 $D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\prod\limits_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$

为 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n$ 的判别式

则 $D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$可表为 $f(x)$的系数的多项式

即 $D(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=S(b_1,b_2,\cdots,b_n)\in P$

显然 $f(x)$有重根$\Longleftrightarrow S(b_1,b_2,\cdots,b_n)=0$

(4)牛顿公式(Newton)

设 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$

$=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$

令 $s_k=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k,(k=0,1,\cdots)$

①证明 $x^{k+1}f(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x$

$+s_k)f(x)+g(x)$

这里 $\partial(g(x))<n$

②牛顿公式：

当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1$

$+(-1)^k\sigma_k=0$

当 $k>n$ 时， $s_k-\sigma_1 s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n s_{k-n}=0$

证明 ① $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x)}{x-x_i}$

$$x^{k+1}f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}f(x)}{x-x_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x^{k+1}-x_i^{k+1}+x_i^{k+1})f(x)}{x-x_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x^{k+1}-x_i^{k+1})f(x)}{x-x_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i}$$

$$=f(x)(s_0x^k-s_1x^{k-1}+\cdots+s_k)+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{k+1}f(x)}{x-x_i}$$

② $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$

$f'(x)=nx^{n-1}-\sigma_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}$

$x^{k+1}f'(x)=nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots$

$+(-1)^k(n-k)\sigma_kx^{n+k-k}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}$

由① $x^{k+1}f'(x)=(\sum_{i=0}^{k}s_ix^{k-i})(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sigma_jx^{n-j})+g(x)$

$$=\sum_{t=0}^{n+k}(\sum_{i+j=t}(-1)^js_i\sigma_j)x^{n+k-t}+g(x)$$

比较系数(第 $k+1$ 项的系数,取 $t=k$)

得出 $k\leqslant n$ 与 $k>n$ 时的结论.(请读者自证).

练习题

1. 若 $(f(x),h(x))=1$,

则 $(f(x)g(x),h(x))=(g(x),h(x))$

2. $(x^m-1,x^n-1)=x^d-1\Longleftrightarrow(m,n)=d$

(提示:充分性:x^m-1 与 x^n-1 的任意公因式的根必是 x^d-1

的根）

3. 设 ε 是 pq 次原根，则 ε^p 是 q 次原根.

4. ε 是 n 次原根 $\Longleftrightarrow \bar{\varepsilon}$ 是 n 次原根.

5. 设 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是全部 n 次单位根，证明

$$\sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i^k = \begin{cases} n, & (\text{当 } n \mid k \text{ 时}) \\ 0, & (\text{当 } n \nmid k \text{ 时}) \end{cases}$$

6. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ 是除 1 以外的 n 次单位根，求证：
$(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_{n-1})=n$.（参看对称多项式的性质(2)）

7. 设 ε, η 分别为 m, n 次本原单位根，证明 $\varepsilon\eta$ 是 mn 次原根 $\Longleftrightarrow (m,n)=1$.

第二章　行列式

行列式是一种工具，研究线性方程组、矩阵、特征多项式等问题时都要用到它. 本章将略述行列式的定义、性质、计算、Binet—Cauchy 公式、方阵和的行列式等.

一、n 阶行列式的定义

原来我们是用 n 级排列来定义 n 级行列式的，现在我们将用 n 次置换来建立 n 级行列式

符号 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

$$(\text{或} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为数码 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列. $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 表排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数. 置换 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots j_n \end{pmatrix}$ 中上下排列的奇偶性相同者称为偶置换，否则称为奇置换.

n 级行列式本质上是个代数和：

(1)项的组成——不同行不同列的 n 个元素之积.

(2)项的符号——由该项对应置换的奇偶性决定.对应偶置换者取"+"号,否则取"−"号.

(3)项的数目——$n!$

对应法则：$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$是 n 级行列式全体项的集合与 n 次对称群 S_n 间的一一对应关系.

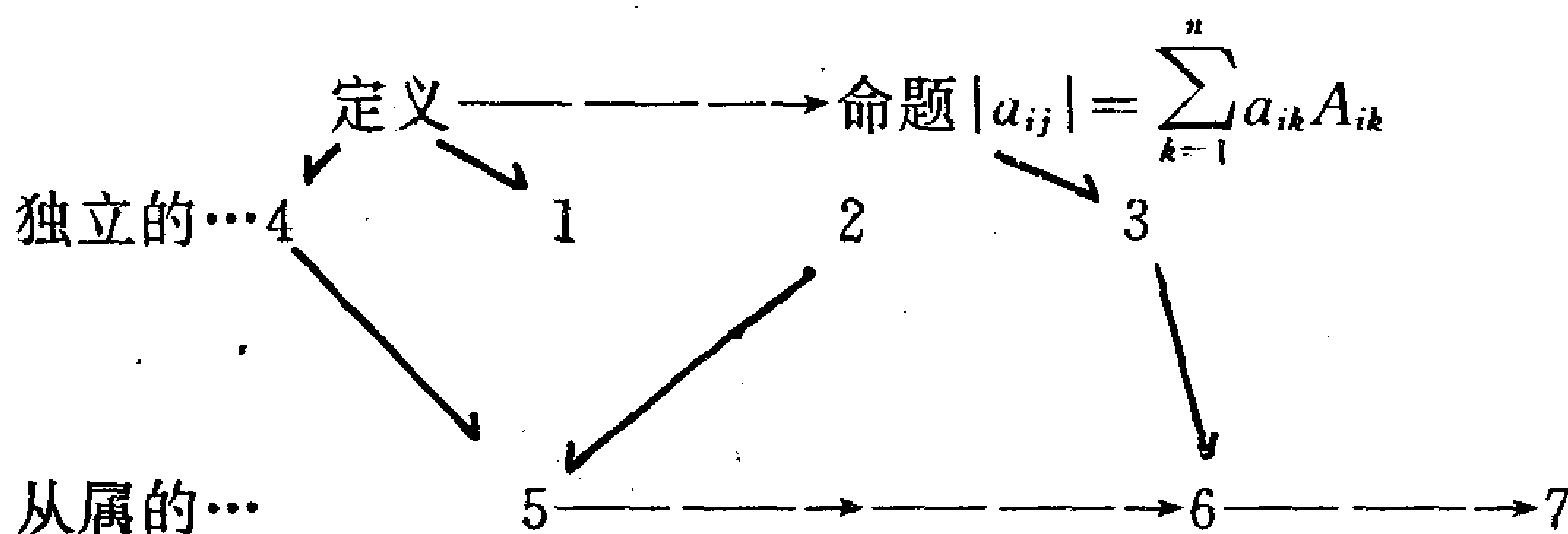
可以证明,全体偶置换 A_n 是群 S_n 的正规子群(即不变子群) S_n 按子群 A_n 进行左陪集分类为：

$S_n = A_n \cup (1,2)A_n$

$|A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{1}{2}n!$, 所以 n 级行列式中正负项各一半,均为$\frac{1}{2}n!$

二、行列式的性质

为研究行列式的计算须要讨论一下行列式的性质.下图说明性质间的内在联系



(图中标号的意义依据北京大学编的《高等代数》)

若是从行列式的值的角度对行列式的性质进行分类的话，可以分为：

(1)行列式的值为零的(性质 4,5)⟺行(列)向量组线性相关.

(2)行列式的值不变的(性质 1,3,6)⟶消法变换保持值不变.

(3)行列式的值改变，但改变的结果是显见的，(性质 2,7)→换法变换、倍法变换改变行列式的值.

三、行列式的计算

1. 依行(或列)展开(可依一行或几行)将高阶行列式化为若干个低级行列式来计算

2. 三角化法：利用行列式的性质，对行(或列)施行消法变换，换法变换可将原行列式主对角线一侧的元素全化为零(三角行列式)　这时主对角线上元素的乘积即为原行列式的值(可能差个符号)

3. 行列式的性质及依行(或列)展开一块用来计算行列式的值

4. 依据行列式元素间的规律来计算；此类型的题变化较多，相应的方法也较多，常用的方法有

(1)逐行(或列)相减法

例 1　计算杨辉三角规律给出的行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 4 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

解 设

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c_2^1 & c_3^1 & \cdots & c_n^1 \\ 1 & c_3^2 & c_4^2 & \cdots & c_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & c_{n-1}^{n-2} & c_n^{n-2} & \cdots & c_{2n-3}^{n-2} \\ 1 & c_n^{n-1} & c_{n+1}^{n-1} & \cdots & c_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

利用 $c_n^k=c_{n-1}^k+c_{n-1}^{k-1}$(即 $c_n^k-C_{n-1}^{k-1}=c_{n-1}^k$)的第$(n-1)$行乘$(-1)$加到第 n 行上去,再将第$(n-2)$行乘(-1)加到第$(n-1)$行上去,……,如此下去,直到将第一行乘以(-1)加到第 2 行上去,得:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & c_2^2 & c_3^2 & \cdots & c_{n-1}^2 & c_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_n^{n-2} & c_{n-1}^{n-2} & \cdots & c_{2n-5}^{n-2} & C_{2n-4}^{n-2} \\ 0 & c_{n-1}^{n-1} & c_n^{n-1} & \cdots & c_{2n-4}^{n-1} & c_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}$$ 同样的办法施用于列得

$$
=\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & c_2^1 & c_3^1 & \cdots & c_{n-1}^1 \\
0 & 1 & c_3^2 & c_4^2 & \cdots & c_n^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 1 & c_{n-2}^{n-3} & c_{n-1}^{n-3} & \cdots & c_{2n-5}^{n-3} \\
0 & 1 & c_{n-1}^{n-2} & c_n^{n-2} & \cdots & c_{2n-4}^{n-2}
\end{vmatrix}
$$

$=1\cdot D_{n-1}=D_{n-1}$

同理，$D_{n-1}=1\cdot D_{n-2}=D_{n-2}=\cdots=D_2=D_1=1$； 逐行(列)相减法就是自下而上(或自右而左)对行(或列)施行消法变换将行列式化简以利于计算行列式的值.

(2)递推降阶法

设法找出 n 阶行列式 D_n 与低阶行列式的关系依次类推来计算行列式的值。

例 2

$$
D_n=\begin{vmatrix}
2 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & \ddots & \ddots & 1 \\
 & & & 1 & 2
\end{vmatrix}\text{(空白处为 0)}
$$

$$
\text{依第一行展开}\ 2\begin{vmatrix}
2 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 1 & \\
 & & \ddots & \ddots & 1 \\
 & & & 1 & 2
\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}
1 & 1 & & & \\
 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & \ddots & \\
 & & \ddots & \ddots & 1 \\
 & & & 1 & 2
\end{vmatrix}
$$

$=2D_{n-1}-D_{n-2}$

$D_1=2$，　$D_2=3$，　$D_3=2D_2-D_1=6-2=4\cdots$
类推有　$D_n=n+1$，须要用归纳法证明一下.

当 $n=1$ 时，$D_1=2$，假设当 $n=k$ 时，$D_k=k+1$，则当 $n=k+1$ 时，$D_n=D_{k+1}=2D_k-D_{k-1}=2(k+1)-k$

$=k+2=(k+1)+1$

例 3

$$D_n=\begin{vmatrix} a & a+b & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加一行上}]{\text{二行乘}(-1)}\begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 \\ a-b & a & a+b & \cdots & a+b \\ a-b & a-b & a & \cdots & a+b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-b & a-b & a-b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加于一列上}]{\text{二列乘}(-1)}\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & & & & \\ 0 & & D_{n-1} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}=b^2D_{n-2}$$

$D_1=a_1$，　$D_2=b^2$

当 n 为偶数时，$D_n=b^2D_{n-2}=b^4D_{n-4}=\cdots=b^{n-2}D_2=b^n$

当 n 为奇数时，$D_n=b^2D_{n-2}=\cdots=b^{n-1}D_{n-(n-1)}=b^{n-1}D_1$
$=ab^{n-1}$

(3)拆开法

把某一行(列)的元素写成两数和的形式,再利用行列式的性质将原行列式写成两行列式的和,使问题简化以利计算.

例 4

$$D=\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & o \\ a & a & \cdots & o & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & o & \cdots & b & b \\ o & b & \cdots & b & b \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} o & a & \cdots & a \\ b & o & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \\ b & b & \cdots & o \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_n$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} o & a & \cdots & a+o \\ b & o & \cdots & a+o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a-a \end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix} o & a & \cdots & a \\ b & o & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} o & a & \cdots & o \\ b & o & \cdots & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -b & a-b & \cdots & a \\ 0 & -b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}-aD_{n-1}=a(-b)^{n-1}-aD_{n-1}$$

$$\begin{cases} D_n+aD_{n-1}=a(-b)^{n-1} \\ D_n+bD_{n-1}=b(-a)^{n-1} \end{cases} \quad (同理可得)$$

当 $a\neq b$ 时，$D_n=(-1)^{n-1}ab(a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+ab^{n-3}+b^{n-2})$

而 $\quad D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_n$

当 $a=b$ 时，易算出

$$D=(n-1)a\begin{vmatrix} 1 & & & -a \\ 1 & & -a & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -a & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)a(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a^{n-1}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)a^n$$

(4)“加边”法(升阶法)

例 5

$$D=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & x+a_n \end{vmatrix} \quad (x\neq 0)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & x & o & \cdots & o \\ -1 & o & x & \cdots & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & o & o & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{x} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ o & x & o & \cdots & a_n \\ o & o & x & \cdots & o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o & o & o & \cdots & x \end{vmatrix}=x^n\left(1+\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)$$

$$=x^n+x^{n-1}\sum_{i=1}^{n}a_i \qquad (\text{当 } x=0 \text{ 时}, D=0)$$

升阶法是将原行列式中增添若干个适当的行与列，构成一个新的行列式，并以此行列式为过渡来达到计算原行列式的目的.

(5)借用“第三者”法(即乘以一个适当的行列式)

例 6 证明 n 级循环行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)$$

$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$， $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为全部 n 次单位根.

证法一 作范德蒙行列式

$$\triangle=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1}\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \varepsilon^{(n-1)} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2}\end{vmatrix}$$，ε 为本原 n 次单位根

由计算 $D\cdot\triangle=f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1})\triangle$

$\because\triangle\neq 0$，$\therefore D=f(1)f(\varepsilon)f(\varepsilon^2)\cdots f(\varepsilon^{n-1})$

证法二 （利用特征多项式、特征根来证）

设 n 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & 1\\ 1 & & \ddots & & & \\ 0 & 1 & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & & & 0\end{bmatrix},\cdots,A^{n-1}=\begin{vmatrix}0 & & & 1\\ 1 & 0 & \ddots & \\ & 1 & \ddots & \ddots \\ & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda & -1 & \ddots & & \\ & \lambda & -1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1\\ -1 & & & & \end{bmatrix}=\lambda^n-1$$

A 的特征值为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

$a_1E+a_2A+a_3A^2+\cdots+a_nA$

$$=f(A)=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix}$$

矩阵 $f(A)$ 的特征根为 $f(\varepsilon_1),f(\varepsilon_2),\cdots,f(\varepsilon_n)$

所以，$|f(A)|=D=f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\cdots f(\varepsilon_n)$

四、行列式的应用——克莱姆规则

五、Binet—Cauchy 公式

设矩阵 $A_{m\times n}\cdot B_{n\times m}=C_{m\times m}$

则 (1)当 $m>n$ 时，$|C|=0$

(2)当 $m=n$ 时，$|C|=|A||B|$

(3)当 $m<n$ 时

$$|C|=\sum_{i_1\cdots i_m}\det\left[A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}\right]\cdot\det\left[B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}\right]$$

，其中 $(i_1\quad i_2\quad \cdots i_m)$ 表示从 $1,2,\cdots,n$ 中取 m 个的一个组合，$A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$ 表示在 A 中取第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列与所有 m 行组成的 m 阶子矩阵，det 为行列式记号.

证明 (1)秩 $C\leqslant$ 秩 $A\leqslant n<m$，C 为退化的，$\therefore |C|=0$，(或 $(A\quad O)\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=AB$，两边取行列式，$\therefore |C|=0$)

(2)$m=n$ 时，显然成立、

(3)$m<n$ 时，考虑 $m+n$ 阶方阵$\begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$

左乘以初等分块方阵得：

$$\begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & B \\ O & E_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & AB \\ -E_n & O \end{pmatrix}$$

两端取行列式

$$\begin{vmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & AB \\ -E_n & O \end{vmatrix}, \quad (1)$$

(1)式右边行列式依后 m 列展开，由 Laplace 定理知

$$\begin{vmatrix} A & AB \\ -E_n & O \end{vmatrix}=(-1)^{S_1}|AB|\cdot|-E_n|$$

$$=(-1)^{S_1}(-1)^n|AB|$$

$S_1=1+2+3+\cdots+m+(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)$

$=\dfrac{2m(1+m)}{2}+mn=m^2+m+mn$

$\therefore$ 右边 $=(-1)^{(m+1)(m+n)}|AB|$

(1)左边行列式依前 m 行展开，这只需考虑在 A 中取 m 阶子式.

例如，m 阶子式 $\det\left[A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}\right]$

[$(i_1i_2\cdots i_m)$ 为从 $1,2,\cdots,n$ 中取 m 个数的组合]的余子式为 $det(-E_{n-i_1,i_2\cdots i_m},B)$（其阶数为 $m+n-m=n$），$-E_{n-i_1,i_2,\cdots,i_m}$ 为在 $-E_n$ 中划去第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列后剩下的 n 行 $n-m$ 列矩阵.

先看 n 阶余子式 $\det[-E_{n-i_1,i_2,\cdots,i_m},B]$ 的值，依后 m 列展开. 我们知道，对于 $-E_n$ 只有任意 k 阶主子式的值为 $(-1)^k$，其它一切非主子式之值均为零.

在$(-E_{n-i_1,i_2,\cdots i_m},B)$中，依后 m 列展开，只有取第 $i_1,i_2,\cdots i_m$ 行得到的子式 $\det B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1, & 2, & \cdots, & m \end{pmatrix}$的余子式才是$-E_n$ 的主子式，因而不为 0. 其它的 B 的 m 阶子式的余子式均为零，所以

$$\det(-E_{n-i_1 i_2\cdots i_m}B)$$

$$=(-1)^{n-m}(-1)^{s_2}\det[B\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_m \\ 1,2,\cdots,m \end{pmatrix}]$$

这里，$S_2=i_1+i_2+\cdots+i_m+[(n-m+1)+(n-m+2)+\cdots+(n-m+m)]$

(1)式左边行列式

$$=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_m)}\det[A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}](-1)^{s_2}\det[-E_{n-i_1,\cdots,i_m}B]$$

这里，$S_2=(i_1+i_2+\cdots+i_m)+(1+2+\cdots+m)$

(1)式左边行列式

$$=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_m)}(-1)^{s_2}(-1)^{n-m}(-1)^{s_2}\det[A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}]\cdot$$

$$\det[B\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ 1 & \cdots & m \end{pmatrix}]$$

$$\because(-1)^{s_2}(-1)^{n-m}(-1)^{s_2}=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_m+1+2+\cdots+m+i_1+\cdots+i_m}$$

$$\cdot(-1)^{m(n-m)+1+2+\cdots+m+(n-m)}$$

$$=(-1)^{m(n-m)+(n-m)}=(-1)^{(n-m)(m+1)}$$

故 $|C|=|AB|$

$$=\sum_{(i_1 i_2\cdots i_m)}\det[A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}]\det[B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}]$$

推论 矩阵 C 的 K 阶子式与 A, B 的 K 阶子式之间的关系为

$$\det\left[C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right]$$

$$= \sum_{(l_1 l_2 \cdots l_k)} \det\left[A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_k \end{pmatrix}\right]\det\left[B\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & \cdots & l_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}\right]$$

$(l_1, l_2, \cdots, l_k)$是 $1, 2, \cdots, n$ 中取 k 个数的一个组合

证明提示：

$$\det C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_{i_1 j_1} & c_{i_1 j_2} & \cdots & c_{i_1 j_k} \\ c_{i_2 j_1} & c_{i_2 j_2} & \cdots & c_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i_k j_1} & c_{i_k j_2} & \cdots & c_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{bmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k 1} & a_{i_k 2} & \cdots & a_{i_k n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{1 j_1} & b_{1 j_2} & \cdots & b_{1 j_k} \\ b_{2 j_1} & b_{2 j_2} & \cdots & b_{2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n j_1} & b_{n j_2} & \cdots & b_{n j_k} \end{bmatrix}\right|$$

然后，再利用 Binet—Cauchy 公式即得.

例 7 证明柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

证明 设 $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$

$$P = AA' = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix}$$

$$|P| = \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)^2$$

另一方面

$$|P| = \sum_{(ij)} \det\left[A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & j \end{pmatrix}\right]\det\left[A'\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$$

$$=\sum[\det A\begin{pmatrix}1 & 2\\ i & j\end{pmatrix}]^2\geqslant 0$$

因此，原不等式成立.

例 8 证明：由正交矩阵 A 的 k 行所成之一切 k 阶子式的平方和为 1.

证明 $AA'=E$，取 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行

则 $$\det[E\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}]$$

$$=\sum_{(l_1l_2\cdots l_k)}\det[A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_k\end{pmatrix}]\det[A'\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & \cdots & l_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}]$$

$$=\sum_{(l_1l_2\cdots l_k)}\det[A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_k\end{pmatrix}]^2=1$$

这里，$l_1,l_2,\cdots,l_k$ 是 $1,2,\cdots,n$ 中取 k 个的组合.

例 9 设 $P=AA'$，证明：

(1)秩 $P=$ 秩 A

(2)P 的 k 阶主子式之和等于 A 的所有 k 阶子式的平方和.

证明 (1)P 的与 A 的最高阶不为 0 的子式的阶数是一样的.

(2)由 $\det[P\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}]$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_k)}\det[A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k\end{pmatrix}]^2$$而得.

例 10 证明阿达玛(Hadamard)不等式，设 n 阶方阵 $A=(a_{jk})$，则 $|A|\leqslant(\sum_{j=1}^{n}a_{1j})^{\frac{1}{2}}\cdots(\sum_{j=1}^{n}a_{nj})^{\frac{1}{2}}$

证明 若 $|A|=0$，不等式成立

若$|A|\neq 0$， 令$B=AA'=(b_{ij})$，则B为正定矩阵

$$|B|=|A|^2\leqslant b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}=(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2)\cdots(\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2)$$

$$\therefore |A|\leqslant(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}^2)^{\frac{1}{2}}\cdots(\sum_{j=1}^{n}a_{nj}^2)^{\frac{1}{2}}$$

六、方阵和的行列式

定理 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$， $B=(b_{ij})_{n\times n}$， $\triangle$表A的任一子式，$\triangle^*$表示B中相当于$\triangle$的子式的代数余子式，则 $|A+B|=$所有可能的$\triangle$与$\triangle^*$之积的和.

证明 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

$$\begin{aligned}|A+B|&=|(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)|\\&=|\beta_1\beta_2\cdots\beta_n|+|\alpha_1\beta_2\cdots\beta_n|+|\beta_1\alpha_2\beta_3\cdots\beta_n|\\&+\cdots+|\beta_1\beta_2\cdots\beta_{n-1}\alpha_n|+|\alpha_1\alpha_2\beta_3\cdots\beta_n|\\&+\cdots+|\beta_1\cdots\beta_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n|+\cdots+|\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}\beta_n|\\&+\cdots+|\beta_1\alpha_2\cdots\alpha_n|+|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|\end{aligned}$$

对于上面的每个$|\cdots\alpha_{t_1}\cdots\alpha_{t_k}\cdots|$应用 Laplace 定理依第$t_1$，$t_2$，$\cdots t_k$列展开得：

$$|\cdots\alpha_{t_1}\cdots\alpha_{t_k}\cdots|=\sum_{(u)}\det[A\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \cdots u_k\\ t_1 & t_2 & \cdots t_k\end{pmatrix}]$$

代余式$\det B\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_k\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k\end{pmatrix}$，$(u)$表$1,2,\cdots,n$中取$k$个的组合.

$$\therefore |A+B|=\sum_{k=0}^{n}\sum_{(t)}\sum_{(u)}\det[A\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_k\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k\end{pmatrix}]$$

$\det[B\begin{pmatrix}u_1 & u_2 & \cdots & u_k\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_k\end{pmatrix}$的代数余子式$]$

例 11 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，求 A 的特征多项式中各项的系数，即 $|\lambda E-A|=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n$ 求：b_k

解 $\left|\begin{bmatrix}\lambda & & \\ & \lambda\ddots & \\ & & \lambda\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn}\end{bmatrix}\right|$

λ^{n-k}的系数 b_k 即 $-A$ 中一切 $n-k$ 阶主子式的余子式（k 阶）之和，亦即 A 的一切 k 阶主子式之和附以 $(-1)^k$

$$b_k=(-1)^k\sum_{(i_1i_2\cdots i_k)}\det\left[A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_k\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k\end{pmatrix}\right]$$

特别，$b_1=(-1)^1\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，　$b_n=(-1)^n|A|$

例 12 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$ 且秩 $B\leqslant 1$，则

(1) $|A+B|=|A|+\sum_{i=1}^{n}b_{ij}A_{ij}$，（$A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式）

(2) $|A+XY'|=|A|+\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_jA_{ij}=|A|+Y'A^*X$

这里　$X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，　$Y'=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

证明 (1) 秩 $B=1$．　则 B 的 k 阶子式（$k\geqslant 2$）为零

$\therefore |A+B|=|A|+$

$\sum M_{n-1}(-1)^{i_1+i_2}+\cdots+i_{n-1}+j_1+j_2+\cdots+j_{n-1}b_{ij}$

$=|A|+\sum b_{ij}A_{ij}$（M_{n-1} 为 A 的任意 $n-1$ 阶子式）

(2) 秩 $XY'\leqslant 1$，　用 (1) 的结论即可．

七、行列式的归纳定义

定义 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 规定为

$$D=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

M_{1j},A_{1j}分别为 a_{1j}的余子式和代数余子式

练习题

1. 计算 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & b & a & & & \\ & & & a & b & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$

2. 设 n 阶行列式 D 的值为 d_1，求：

(1)将 D 绕中心顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$所得的行列式的值.

(2)以次对角线为轴交换对称位置的元素后所得的行列式的值.

3. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & \lambda_n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & 1 & 3 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ z & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & \cdots & x \end{vmatrix}$$

4. 当实矩阵 A 非退化时，证明 AA' 的顺序主子式均大于零.

5. 设实 n 元列向量 u 的长为 1

计算行列式 $|E_n - 2uu'|$

6. 设 A, B 均为 n 阶方阵，求证：可以利用

Binet——Cauchy 公式证明 $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$

7. 利用 Binet——Cauchy 公式证明：矩阵乘积的秩不超过因子的秩.

第三章　线性方程组

线性方程组的理论是非常重要的基础知识，它有着广泛的应用．所谓线性方程组的理论，包括线性方程组有解的判别条件；解的个数；解的方法以及解的结构等．

设$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$为下面线性方程组的一个解

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

代入得

$$\begin{cases} a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1n}k_n=b_1 \\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2n}k_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+\cdots+a_{mn}k_n=b_m \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} k_1+\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} k_2+\cdots+\begin{bmatrix} a_1n \\ a_2n \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} k_n=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

由此可知：向量、矩阵与线性方程组的关系是很密切的．

一、线性方程组的初等变换

定义　以下三种变换称为线性方程组的初等变换：

(1)交换任意两个方程的位置.

(2)用一个不等于零的数乘以某一方程的两端.

(3)用一个数乘某一方程的两端加到另一方程上去.

可以证明一个线性方程组经过若干次初等变换所得到的新的线性方程组与原方程组同解.

对一个方程组进行初等变换，实际上就是对它的增广矩阵的行进行的矩阵的初等变换.

对增广矩阵的行进行初等变换总可以化为阶梯型矩阵，其对应的方程组有解与否即可看出.

线性方程组的初等变换概括了中学里解二元、三元线性方程组所用的加减消去法，代入消元法.

二、向量的线性相关性，向量组的秩

定义　P^n 中向量组的线性相关、线性无关、线性表示、等价、极大无关部分组，以及向量组的秩等.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性无关(相关)的充分必要条件是以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为列作成的矩阵为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解(存在非零解)　β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是以 $\alpha_1,\cdots\alpha_m,\beta$ 为列作成的矩阵为增广矩阵的线性方程组有解.

这些基本概念比较重要，它以后发展、应用到矩阵的秩，线性空间的基底和维数，二次型的秩等.

应熟练掌握的基本性质

(1)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关$\Longleftrightarrow$其中至少有一个向量(不一定是每一个向量)可由其余向量线性表示.

(2)将一个线性相关(线性无关)的向量组任意增添(减少)若干个向量所得新向量组仍线性相关(线性无关).若去掉(增加)若干个向量,则不一定.

(3)若将线性无关的 r 维(或元)向量组中每个向量均延长相同个数的分量而得到的 n 维向量组仍线性无关.若去掉相同个数的分量,则不一定.

(4)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,且向量 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

(5)设向量 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,则表示法唯一$\Longleftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

(6)向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示,即有

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)B$ 则向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩等于矩阵 B 的秩.

(7)设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任何 r 个线性无关的向量为其极大无关组,且任何两个极大无关组等价.

(8)两个向量组等价的必要条件是它们的秩相等,但此条件并不充分.

(9)设两向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩均为 r,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表示,则此二向量组等价.

证明 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的极大无关部分组,β_1,

$\cdots,\beta_r$ 为 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的极大无关部分组，

则有$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)B$

秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)=$秩 $B=r,|B|\neq 0$,有

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)B^{-1}=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$

由此得原二向量组等价.

推论 若方阵 A 的列向量组可由行向量组线性表示，则 A 的行向量组与列向量组等价.

2. Steinitz **替换定理**

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$(Ⅰ)线性无关，并且可由向量组 β_1, $\beta_2,\cdots,\beta_s$(Ⅱ)线性表示，则(1)$r\leqslant s$

(2) 适当地选取 r 个 β_i 用 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 替换得(可设)

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$(Ⅲ)

与向量组(Ⅱ)等价.

证法一 对 r 用归纳法来证

当 $r=1$ 时，$\alpha_1=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s\quad r\leqslant s\quad k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为 0，否则与 α_1 线性无关矛盾. 不妨设 $k_1\neq 0$，即有 β_1 可由 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示. 得 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与(Ⅱ)等价.

假设命题对 $r-1$ 成立，今对 r 证，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$线性无关，由归纳假定，有 $r-1\leqslant s$，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s$(Ⅲ)$'$与(Ⅱ)等价.

我们说 $r-1\neq s$，否则若 $r-1=s$，但 α_r 可由(Ⅱ)线性表示，(Ⅱ)与(Ⅲ)$'=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}\}$等价，得 α_r 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表示，此与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关矛盾.

$\therefore r-1<s\qquad$ 即 $\quad r\leqslant s$

α_r 可由(Ⅲ)$'$线性表示

$\alpha_r=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}+k_r\beta_r+\cdots+k_s\beta_s$ 其中 k_r,

$\cdots, k_s$ 不全为零，否则将与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关矛盾.

可设　$k_r \neq 0$ 得 β_r 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s$ 线性表示. 因此 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s$ 与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}, \beta_r, \cdots, \beta_s$ 等价，而后者与(Ⅱ)等价，所以向量组(Ⅲ)与(Ⅱ)等价.

证法二

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$，　$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) \subseteq L(\beta_1, \cdots, \beta_s)$，　$r=$ 维数 $L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r) \leq$ 维数 $L(\beta_1, \cdots, \beta_s) \leqslant s$，

$L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) = L(\beta_1, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r)$.　$\beta_1, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性相关，存在不全为零的数 k_i, t_j，　使

$$k_1\beta_1 + \cdots + k_s\beta_s + t_1\alpha_1 + \cdots + t_r\alpha_r = 0$$

这里 $k_1, \cdots, k_s$ 不全为 0，否则与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关矛盾.

可设　$k_1 \neq 0$，β_1 可由 $\beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，

$\therefore L(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r) = L(\beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ 重复以上讨论过程，可以得到

$$\begin{aligned} L(\beta_{s-r}, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r) &= L(\beta_1, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r) \\ &= L(\beta_1, \cdots, \beta_s) \end{aligned}$$

所以，$\beta_1, \cdots, \beta_s$ 等价于 $\beta_{s-r}, \beta_{s-r+1}, \cdots, \beta_s, \alpha_1, \cdots, \alpha_r$，于是，定理的第二个结论成立.

推论 1　若向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 可由 $\beta_1, \cdots, \beta_s$ 线性表示，且 $m > s$，则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关.

推论 2　两个等价的线性无关的向量组含有相同个数的向量.

三、矩阵的秩，线性方程组有解判别定理，矩阵行等价标准形的应用

1. 秩的几个等价的定义

(1)矩阵行向量组的极大无关部分组所含向量的个数，称为矩阵的秩.

(2)矩阵列向量组的极大无关部分组所含向量 的个数.

(3)矩阵中最大阶不为零的子式的阶数.

(4)矩阵 A 的秩等于 r 的充分必要条件是有 r 阶子式.

$D\neq 0$，且一切包含 D 的 $r+1$ 阶子式均为零

证明 $\Longrightarrow$ 显然

$\Longleftarrow$ 设

$$A_{m\times n}=(a_{ij})=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$$

还可设位于 A 的左上角的 r 阶子式 $D\neq 0$，令 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\\ \alpha_i\end{bmatrix}$

$(i=r+1=,r+2,\cdots,m)$

对于 $r+1$ 阶子式

$$C=\begin{vmatrix} & & & a_{1t}\\ & & & a_{2t}\\ & D & & \vdots\\ & & & a_{rt}\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{it}\end{vmatrix}=0.\quad t=1,2,\cdots,n$$

C 按最后一列展开：$a_{1t}A_1+a_{2t}A_2+\cdots+a_{rt}A_r+a_{it}D=0$，

$D\neq 0, A_1,\cdots,A_r$，　D 为 $a_{1t},a_{2t},\cdots,a_{rt},a_{it}$在 C 中的代数余子式. 由 $t=1,2,\cdots,n$，综合可得：

$$A_1\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ \vdots\\ a_{1n}\end{bmatrix}+A_2\begin{bmatrix}a_{21}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{2n}\end{bmatrix}+\cdots+A_r\begin{bmatrix}a_{r1}\\ a_{r2}\\ \vdots\\ a_{rn}\end{bmatrix}=-D\begin{bmatrix}a_{i1}\\ a_{i2}\\ \vdots\\ a_{in}\end{bmatrix}$$

即 α_i 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.

又　$\because D\neq 0$，　$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，因此，秩 $A=r$.

2. 初等变换不改变矩阵的秩. 两个行数、列数相同的矩阵等价的充要条件是它们的秩相等

3. 线性方程组有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩. 对增广矩阵的行施行初等变换,可以求出线性方程组的一般解

设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,则对 A 的行施行初等变换总可以化为矩阵 B,使得 B 的后 $m-r$ 行全是零;且 B 中有 r 个互不相同的单位向量列,称 B 为 A 的行等价标准形. 其用途:

(1)利用行等价标准形可以解线性方程组:以 A 为增广矩阵的线性方程组与以 A 的行等价标准型 B 为增广矩阵的线性方程组是同解的. 将 B 中单位列向量对应的未知量视为非自由未知量,而其余的对应的未知量视为自由未知量,最后一列视为常数项. 即可得线性方程组的解.

例如,解线性方程组:$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

求其增广矩阵 $\bar{A}$的行等价标准形

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}2&3&-1&1\\3&2&-2&2\\5&0&-4&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\frac{4}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\bar{B}$$

方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩均为 2，小于未知量的个数 3，故此方程组有无穷多解. 将 $\bar{B}$的单位向量列对应的未知量 x_1,x_2 视为非自由未知量，其余的列对应的未知量 x_3 视为自由未知量，可以直接写出线性方程组的解：

$$\begin{cases}x_1=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}x_3\\x_2=-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}x_3\end{cases},\quad (x_3\text{ 可以自由给值})$$

(2)利用矩阵的行等价标准形还可以求出向量间的线性关系，即对矩阵的行(列)施行初等变换，不改变列(行)间的线性关系，例如，如上例，设 $\bar{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，

$\bar{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

由观察计算，容易得出 $\bar{B}$ 的列间的线性关系：

$$\beta_3=-\frac{4}{5}\beta_1+\frac{1}{5}\beta_2,\ \beta_4=\frac{4}{5}\beta_1-\frac{1}{5}\beta_2,\ \beta_4=\frac{8}{5}\beta_1-\frac{2}{5}\beta_2+\beta_3$$

因此，亦有 $\bar{A}$ 的列向量间的同样的线性关系：

$$\alpha_3=-\frac{4}{5}\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2,\ \alpha_4=\frac{4}{5}\alpha_1-\frac{1}{5}\alpha_2,\ \alpha_4=\frac{8}{5}\alpha_1-\frac{2}{5}\alpha_2+\alpha_3$$

(3)利用行等价标准形还可以求出向量组的极大线性无关部分组. 行等价标准矩阵中单位列向量是其列向量组的极大无关部分组，其在原矩阵中对应的列向量是原矩阵的列向量组的极大无关部分组. 如上例，β_1,β_2 是 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的极大无关部分组，因此 α_1,α_2，是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大无关部分组.

(4)利用矩阵的行等价标准形还可以进行矩阵的满秩分解，(参看第四章四，1).

四、线性方程组解的结构，求基础解系的方法

我们研究线性方程组解集合的构造情况，亦即解与解之间的关系. 我们说线性方程组的全部解可由有限个解表示出来.

1. 设秩 $A=r$，则齐次线性方程组 $AX=0$ 的解集合构成一个 $n-r$ 维子空间(A 为 $m\times n$ 阵)，其基底称为齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系. 求基础解系的方法一定要牢固掌握. 下面介绍两种求基础解系的方法

命题 1 设 $m\times n$ 阵 A 的秩为 r，对 A 的行施行初等变换

化为 $B=\begin{pmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $D=\begin{pmatrix} C \\ -E_{n-r} \end{pmatrix}$的列向量为齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系.

证明 因 $AX=0$ 与$\begin{pmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X=0$ 同解，后者，以 x_{r+1}，…，x_n 为自由未知量，取 $n-r$ 组值$(-1,0,\cdots,0)$，$(0,-1,0,\cdots,0)$，…$(0,\cdots,0,-1)$即得$\begin{pmatrix} C \\ -E_{n-r} \end{pmatrix}$的 $n-r$ 个列向量为$\begin{pmatrix} E_r & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}X=0$ 的解向量，又因，$\begin{pmatrix} C \\ -E_{n-r} \end{pmatrix}$的秩为 $n-r$，故此 $n-r$ 个列向量是基础解系.

命题 2 假设如命题 1，若 A 的行等价标准形 B 中，r 个单位列向量不位在前 r 列，这时存在 n 阶非退化阵 Q，使 $BQ=\begin{pmatrix} E_r & C_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $Q\begin{pmatrix} C_1 \\ -E_{n-r} \end{pmatrix}$的列向量为 $BX=0$(亦即 $AX=0$)的基础解系.

证明 施行换法变换可将 B 变为$\begin{pmatrix} E_r & C_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$， 故存在 n 阶非退化阵 Q，右乘 B 为 $BQ=\begin{pmatrix} E_r & C_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，由命题 1，$\begin{pmatrix} C_1 \\ -E_{n-r} \end{pmatrix}$为$(BQ)X=0$ 的基础解系，故 $Q\begin{pmatrix} C_1 \\ -E_{n-r} \end{pmatrix}$的列向量

为 $BX=0$ 的解，因而是 $BX=0$ 的基础解系.

命题 3 设 A 为秩是 r 的 $m\times n$ 矩阵，则存在 n 阶非退化阵 P，使 AP 的后 $n-r$ 列为零，且 P 的后 $n-r$ 列即是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系.

证明 对 A 的列施行初等变换可使 A 的后 $n-r$ 列变为零. 即对矩阵

$$\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}\text{施行列的初等变换可化为}\begin{pmatrix} B \\ P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix},$$

B_1 为 $m\times r$ 阵， 0 为 $m\times(n-r)$阵， P_2 为 $n\times(n-r)$阵

令 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,0,\cdots,0)$

$$P=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1}\cdots\eta_n),\quad P_2=(\eta_{r+1},\cdots,\eta_n)$$

则由 $AP=B$ 有 $A(\eta_1,\cdots\eta_r,\eta_{r+1}\cdots,\eta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_r,0,\cdots,0)$

$$\therefore\quad A\eta_{r+1}=0,\cdots,A\eta_n=0$$

因 P 是非退化的，故 $\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$ 线性无关. 所以，η_{r+1}，$\cdots$，η_n 是 $AX=0$ 的基础解系.

2. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的一般解是它的一个固定解 β 加上其导出方程组的基础解系的线性组合

$$\beta+(k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_{n-r}\varepsilon_{n-r})$$

这是因为一般线性方程组的两个解之差是其导出方程组

的解;且一般线性方程组的一个解与其导出方程组的一个解之和仍是原方程组的解.下面我们进一步讨论一般线性方程组的解集合的构造.

(1)设秩 $A=$秩 $\overline{A}=r$,则方程组 $AX=b$ 的解向量集合的秩是 $n-r+1\quad(\overline{A}=(A,b))$.

证明 设 $AX=b$ 的一个解为 β,$AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$,则 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_{n-r}$均为 $AX=b$ 的解.我们说它是线性无关的:

若有:$k\beta+\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i(\beta+\alpha_i)=0$

即有: $(k+\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i)\beta+\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i\alpha_i=0$,必有:$k+\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i=0$

否则,有 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表示,因而是 $AX=0$ 的解,

这是不可能的.进而得 $\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i\alpha_i=0,\quad k_i=0\Longrightarrow k=0$

再设,γ 为 $AX=b$ 的任意一个解,则 $\gamma-\beta$ 是 $AX=0$ 的解,因而可由基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表示.

$\gamma-\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}$

$\gamma=\beta+\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i\alpha_i=(1-\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i)\beta+\sum\limits_{i=1}^{n-r}k_i(\beta+\alpha_i)$

故 $\beta,\beta+\alpha_1,\cdots,\beta+\alpha_{n-r}$是 $AX=b$ 的解集合的极大无关组.因此得证.

(2)设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r+1}$ 为 $AX=b$ 的解集合的极大无关组，则 $\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i\beta_i=\gamma$ 为 $AX=b$ 的解 $\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n-r+1} k_i=1$

证明 $\Longrightarrow \gamma=\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i\beta_i=(\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i)\beta_1$

$+\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i(\beta_i-\beta_1)$

则 $\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i\beta_1$ 为 $AX=b$ 的解，$\therefore \sum_{i=1}^{n-r+1} k_i=1$

$\Longleftarrow$ 当 $\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i=1$ 时， $k_1=1-k_2-\cdots-k_{n-r+1}$

$$\gamma=\sum_{i=1}^{n-r+1} k_i\beta_i=(1-k_2-\cdots-k_{n-r+1})\beta_1+\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i\beta_i$$

$$=\beta_1+\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i(\beta_i-\beta_1)$$

即 γ 为 $AX=b$ 的解

(3) 设 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}$ 为 $AX=b$ 的“基础解系”(即解集合的极大无关部分组)，则 $\beta_2-\beta_1,\beta_3-\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}-\beta_1$，为 $AX=0$ 的基础解系.

证明 $\beta_2-\beta_1,\beta_3-\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}-\beta_1$ 为 $AX=0$ 的解，若有 $\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i(\beta_i-\beta_1)=0$， $\Longrightarrow -\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i\beta_1+\sum_{i=2}^{n-r+1} k_i\beta_i=0$

必有 $k_i=0$， $i=2,3,\cdots,n-r+1$

$AX=0$ 的解空间是 r 维的，所以 $\beta_2-\beta_1,\cdots,\beta_{n-r+1}-\beta_1$ 为 $AX=0$ 的基础解系.

（同样 $\beta_1-\beta_2,\beta_2-\beta_3,\cdots,\beta_{n-r}-\beta_{n-r+1}$ 亦是 $AX=0$ 的基础解系）

五、关于解线性方程组的逆问题

以前我们研究了已知线性方程组求解的问题，现在我们来讨论已知解去求线性方程组的问题.

先看齐次线性方程组的情况.

命题 1 设 n 维向量组 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,s$ 线性无关. 令

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_s\end{bmatrix},\quad AX=0 \text{ 的基础解系为 } \beta_j=(b_{j1},\cdots,b_{jn})\quad j=1,2,\cdots,n-s$$

令 $B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_{n-s}\end{bmatrix}$，则当且仅当形如齐次线性方程组

$BX=0$ 的基础解系才是 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s'$

证明 $\because$ $A\beta_j'=0$, $\therefore AB'=0 \Longleftrightarrow BA'=0'$

即 A'的列向量(即 A 的行向量 α_i)为 $BX=0$ 的解. 秩 $A=s$, 秩 $B=n-s$,故结论成立.

注:任给向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$,其极大无关组(可设)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 总是存在的,则以原向量组为解的齐次线性方程组总是存在的,并且可以按命题1的方法求出来. 这里答案不是唯一的.

命题 2 设向量组 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,t$,线性无关,且以 $\alpha_1-\alpha_t,\alpha_2-\alpha_t,\cdots,\alpha_{t-1}-\alpha_t$ 为基础解系的齐次线性方程组为 $BX=0$,这里 B 为$(n-t+1)\times n$ 矩阵.
则当且仅当形如线性方程组 $BX=B\alpha'_1$ 的"基础解系"才是向量组 $\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_t$.

证明 $B(\alpha_1-\alpha_2)'=B[(\alpha_1-\alpha_t)-(\alpha_2-\alpha_t)]'$

$=B(\alpha_1-\alpha_t)'-B(\alpha_2-\alpha_t)'=0-0=0$

即 $B\alpha_1'-B\alpha_2'=0$; $B\alpha_2'=B\alpha_1'$

此即 α'_2 为线性方程组 $BX=B\alpha_1'$的解.

同理,$\alpha'_3,\cdots,\alpha'_t$ 均为方程组 $BX=B\alpha_1'$的解,反之,亦真. 这里答案不是唯一的.

注:并不是以任意向量组为解的线性方程组都是存在的.

六、例题

例1 设 秩 $A_{n\times n}=r$,则存在秩为 $n-r$ 的 n 阶矩阵 B 和 C,使 $AB=0$, $CA=0$.

证明 齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系为

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$$

令矩阵 $B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\xi_{n-r+1},\cdots,\xi_n)$其中 $\xi_j(j=n-r+1,\cdots,n)$、是 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$的线性组合,则有 $AB=0$

同理,存在 D,使 $A'D=0$, $D'A=0$,令 $D'=C$,即 $CA=0$.

例2 两个 $m\times n$ 矩阵 A 与 B 的行向量组等价的充要条件是:$AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

证明 设

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix}$$

则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解$\Longleftrightarrow$

$AX=0$ 与 $\begin{pmatrix}A\\ \beta_i\end{pmatrix}X=0$ 同解及 $BX=0$ 与 $\begin{pmatrix}B\\ \alpha_i\end{pmatrix}X$ 同解

$\Longleftrightarrow$秩 $A=$秩$\begin{pmatrix}A\\\beta_i\end{pmatrix}$及秩 $B=$秩$\begin{pmatrix}B\\\alpha_i\end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow\beta_i$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，

α_i 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表示，

$\Longleftrightarrow$向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 等价

例 3 线性方程组 $AX=0$ 的解均为 $BX=0$ 解，则秩 $A\geqslant$秩 B.

证明 设秩 $A=r$，则 $AX=0$ 的解空间 W_1 的维数为 $n-r$，设秩 $B=S$，则 $BX=0$ 的解空间 W_2 的维数为 $n-s$.

$\because\ W_1\subseteq W_2,\quad\therefore n-r\leqslant n-s$，故 $r\geqslant s$

例 4 秩 $AB=$秩 $B\Longleftrightarrow$线性方程组 $ABX=O$ 与 $BX=0$ 同解.

证明 $BX=0$ 的解空间 W_1 属于 $ABX=0$ 的解空间 W_2，由例 3 知，秩 $B\geqslant$秩 AB，但秩 $AB=$秩 B，$\therefore W_1=W_2$.

反之，亦真.

例 5 证明 齐次方程组 $AX=0$ 与 $A'AX=0$ 同解.

证明 $AX=0$ 的解显然为 $A'AX=0$ 的解，

又 $A'AX=0$，则 $X'A'AX=0$，即有 $(AX)'AX=0$

因此必有 $AX=0$ $\therefore AX=0$ 与 $A'AX=0$ 同解.

推论 秩 $A'A=$秩 A

练习题

1. 证明:当秩 $A=r$ 时,则位于 r 个线性无关的列与 r 个线性无关的行交叉处元素所成的 A 的 r 阶子式不为零.

2. 证明:对称矩阵的秩等于最高阶不为零的主子式的阶数.

3. 求出分别以向量组 $\alpha_1=(1,-2,1,0,0)$, $\alpha_2=(1,-2,0,1,0)$, $\alpha_3=(5,-6,0,0,1)$及向量组 $\beta_1=(-1,1,1,0,0)$, $\beta_2=(\frac{7}{6},\frac{5}{6},0,\frac{1}{3},1)$为解的齐次线性方程组.

4. 求以向量组 $\alpha_1=(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3},0,0)$, $\alpha_2=(0,0,-1,-1,0)$, $\alpha_3=(-1,-1,0,0,-1)$为"基础解系"的一般线性方程组.

答案:

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & -\frac{2}{3}x_4-\frac{5}{3}x_5 & =\frac{2}{3} \\ x_2 & -x_5 & =0 \\ x_3 & -\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_5 & =-\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

5. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=2 \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1 \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=8 \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=9 \end{cases}$$

6. 求下面齐次线性方程组的基础解系

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-7x_5=0 \end{cases}$$

7. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_s$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，$\eta_1,\cdots,\eta_k$ 为 $AX=0$ 的 k 个线性无关的解向量，证明，若 $k<s$，则可以从 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_s$ 中取 $s-k$ 个向量与 $\eta_1,\cdots,\eta_k$ 一并构成一个基础解系.

8. 证明：线性方程组 $AX=b$ 有解 $\Longleftrightarrow b$ 与齐次线性方程组 $A'Y=0$ 的解空间正交（$A\neq 0$）

9. 在实数域上，n 阶方阵 $A\neq 0$，b 为任意向量.

证明 $A'AX=A'b$ 必有解.

（提示：秩 $A=$ 秩 $A'A\leqslant$ 秩$(A'A,A'b)=$ 秩 $A'(A,b)\leqslant$ 秩 A'）

第四章　矩　阵

自从1858年卡莱(Coglcg)建立了矩阵的运算，矩阵理论迅速地建立起来，矩阵现已是线性代数中最重要的部分，它贯串于线性代数的始终，可以说线性代数就是矩阵的代数. 矩阵也是处理高等数学很多问题的有力工具.

一、矩阵环、矩阵空间

矩阵的定义、相等、运算法则(加、减、乘、数乘)及其性质. 这里，要特别注意矩阵乘法的运算定义及性质.

$AB=C$，　说明 C 的第 i 个列向量是 A 的列向量的线性组合，其系数正好是 B 的第 i 列. 而 C 的第 i 个行向量是 B 的行向量的线性组合，其系数正好是 A 的第 i 行.

数域 P 上所有 $m\times n$ 矩阵 $P^{m\times n}$ 对于矩阵的加法与数乘，构成一个 P 上的 $m\times n$ 维线性空间.

其基底为 E_{ij}，　$i=1,2,\cdots,m$，　$j=1,2,\cdots,n$　(E_{ij} 表示第 i 行第 j 列为1，其余元素为零的矩阵)

数域 P 上全体 n 阶方阵 $P^{n\times n}$ 对于加法及乘法构成一个有单位元，有零因子的非可换环.

例1　设矩阵 $A_{m\times n}$，　则 A 是左零因子 $\Longleftrightarrow$ 秩 $A<n$

A 是右零因子 $\Longleftrightarrow$ 秩 $A<m$

证明. 只须证左零因子的情况，右零因子的情况类似.

$\Longrightarrow$ 由 $AB=0$，　$A\neq 0$，　$B\neq 0$，　B 的列向量(有非零的)是齐次线性方程组　$AZ=0$ 的解，$AZ=0$ 有非零解，所以，

秩 $A<n$

$\Longleftarrow$ 秩 $A<n$，　则 $AZ=0$ 有非零解，所以，存在矩阵 B，使 $AB=0$，B 的列向量均为 $AZ=0$ 的解，　且 $B\neq 0$

例 2　设 β、γ 均为一列向量(或叫矢量)

则 $A\beta=\gamma \Longleftrightarrow \gamma$ 为 A 的列向量的线性组合，且其系数为 β.

$\beta' B=\gamma' \Longleftrightarrow \gamma'$ 是 B 的行向量的线性组合，且其系数为 β'.

证明　只须验证即可.

例 3　设方阵 $A=(a_{ij})$，α_j 是 A 的第 j 列，　β_i 是 A 的第 i 行，e_i 是 E 的第 i 列，　则

①$Ae_j=\alpha_j$　　②$e'_iA=\beta_i$　　③$e'_iAe_j=a_{ij}$

$$④A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_k} \end{pmatrix} A(e_{j_1},\cdots,e_{j_k})$$

(只须验证即可)

例 4　求证，对于任意复向量 Z 均有 $Z^H BZ=0$ 的充要条件为 $B=0$(Z^H 表示 Z 的转置共轭)

证明　$\Longleftarrow$ 显然

$\Longrightarrow$ 设 $B=(b_{ij})$，取 $Z=e_i+\lambda e_j$　(λ 为复数)

则 $(e_i+\lambda e_j)^H B(e_i+\lambda e_j)=0$

$\because$　$e_i^H Be_i=0$，　$e_j^H Be_j=0$　(题设)

$\therefore$ 有 $\bar{\lambda} e_j^H Be_i=-\lambda e_i^H Be_j$

即有 $\bar{\lambda} e_j' Be_j=-\lambda e_i' Be_j$　($\because e_j^H=e'_j$)

由例 3 知　$\bar{\lambda} b_{ji}=-\lambda b_{ij}$

取　$\lambda=1$，　$\lambda=i$　可得　$b_{ji}=-b_{ij}$ 与 $b_{ji}=b_{ij}$

从而，$\forall i,j$ 有 $b_{ij}=0$，即 $B=0$

二、矩阵的分块

把矩阵分块是处理高阶矩阵的有效方法，矩阵分块的标准是使矩阵块可以运算，在进行分块矩阵的运算时，一般可以把矩阵块当做矩阵的元素一样来进行运算，熟练掌握分块矩阵的方法，对于处理许多矩阵问题是很有帮助的.

设 $A\in P^{m\times n}$，$B\in P^{n\times d}$，对 A 与 B 进行分块：

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{ts} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr} \end{pmatrix}$$

其中，块 A_{ij}是 $m_i\times n_j$ 阵（$i=1,2,\cdots,t$，$j=1,2,\cdots,s$），B_{jk}是 $n_j\times p_k$ 矩阵（$j=1,2,\cdots,s$，$k=1,2,\cdots,r$），$C_{ik}=A_{i1}B_{1k}+A_{i2}B_{2k}+\cdots+A_{is}B_{sk}$. 这里，$m_1+\cdots+m_t=m$，$n_1+n_2+\cdots+n_s=n$，$p_1+p_2+\cdots+p_r=d$.

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{t1} & \cdots & A_{ts} \end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix} A_{11}' & \cdots & A_{t1}' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1s}' & \cdots & A_{ts}' \end{pmatrix}$$

例 5 若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$，这里 A_{11}，A_{22}为方块，则 $|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}|$

证明 只须按 A_{11}所在的列应用拉普拉斯定理展开即得.

例 6 当方块$|A_{11}|\neq 0$ 或$|A_{22}|\neq 0$ 时，求 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$的行列式

解 当$|A_{11}|\neq 0$，以$-A_{21}A_{11}^{-1}$右乘A的第一行加到第二行上去，即相当于

$$\begin{pmatrix} E_{n1} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

（n_1, n_2分别为A_{11}, A_{22}的阶数）

两端取行列式$|A|=|A_{11}|\cdot|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$

同样，当$|A_{22}|\neq 0$时， $|A|=|A_{22}|\cdot|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$

例 7 当$|A_{11}|\neq 0$或$|A_{22}|\neq 0$时， 求

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$的逆矩阵

解 由上$|A_{11}|\neq 0$

$$\begin{pmatrix} E_{n1} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{n1} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E_{n2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n1} & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & E_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E_{n2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} E_{n1} & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E_{n2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n1} & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & E_{n2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} E_{n1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & (A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n1} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E_{n2} \end{pmatrix}$$

通过计算可得

类似地方法，当$|A_{22}|\neq 0$， 亦可求出A^{-1}

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} E_{n1} & 0 \\ -A_{12}A_{22}^{-1} & E_{n2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1} & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n1} & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & E_{n2} \end{pmatrix}$$

例 8　若 A、B、C 均为 n 阶方阵，且 $AC=CA$，

则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$

证明　若 A 为满秩，由 $AC=CA$ 得 $CA^{-1}=A^{-1}C$，　由前面的例有

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

两端取行列式

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \cdot |D-CA^{-1}B| = |AD-ACA^{-1}B| = |AD-CB|$$

若 A 降秩，当 λ 适当大，$A+\lambda E$ 恒为满秩，由 $CA=AC$ 可得 $(A+\lambda E)C=C(A+\lambda E)$，由刚才所证可得

$$\begin{vmatrix} A+\lambda E & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD+\lambda D-CB|$$

这是关于 λ 的恒等式，令 $\lambda=0$，有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$$

例 9　利用分块矩阵证明　$|AB|=|A||B|$

证明　$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{pmatrix}$

上式相当于对 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$ 的列施行若干次消法变换，所以有

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & AB \\ -E & 0 \end{vmatrix}$$

两端均以后 n 列运用 *laplace* 定理展开得，

$$|A| \cdot |B| = |AB|(-1)^{1+2+\cdots+2n}|-E|$$

$$= |AB| \cdot (-1)^{2(n^2+n)} = |AB|$$

例 10 求证 $\begin{vmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{vmatrix} = -X^T A^* Y$，

其中 $X^T = X'(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$Y^T = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$， A^* 为 A 的伴随矩阵

证明 当 A 非奇异时，

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -X^T A^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & Y \\ 0 & -X^T A^{-1} Y \end{pmatrix}$$

两端取行列式

$$\begin{vmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & Y \\ 0 & -X^T A^{-1} Y \end{vmatrix} = |A|(-X^T A^{-1} Y) = -X^T A^* Y$$

当 A 奇异时，设 μ 为 A 的特征值中绝对值最小者，$0 < \varepsilon < \mu$， $|A + \varepsilon E| \neq 0$，由上面证明有

$$\begin{vmatrix} A+\varepsilon E & Y \\ X^T & 0 \end{vmatrix} = -X^T (A+\varepsilon E)^* Y$$

两边为关于 ε 的连续函数，令 $\varepsilon \longrightarrow 0$ 得

$$\begin{vmatrix} A & Y \\ X^T & 0 \end{vmatrix} = -X^T A^* Y$$

三、初等矩阵

1. 定义

换法矩阵：

$$P(i,j)\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & & \vdots & 1 & \vdots & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ (i\text{ 行})\\ \\ \\ \\ (j\text{ 行})\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

倍法矩阵：

$$P(i(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \cdots & & & k & & & \cdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}(i\text{ 行})\quad k\neq 0$$

消法矩阵：

$$P(i,j(k)=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}(i\text{ 行})\\ (j\text{ 行})\end{matrix}$$

统称为初等矩阵

2. 性质

(1)初等矩阵均非奇异(非退化)；初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵；初等矩阵的转置矩阵仍为初等矩阵

证明 $|P(i,j)|=-1\neq 0$, $|P(i(k))|=k\neq 0$,

$|P(i,j(k))|=1\neq 0$, $P^{-1}(i,j)=P(i,j)$

$P(i(k))^{-1}=P(i(\frac{1}{k}))$, $P^{-1}(i,j(k))=P(i,j(-k))$

$P^{-1}(i,j)=P(i,j)$, $P(i(k))'=P(i(k))$

$P(i,j(k))'=P(j,i(k))$

(2)对矩阵 $A_{m\times n}$的行(列)施行初等变换相当于在 A 的左(右)边乘上相应的初等矩阵 $P_{m\times m}$(或 $P_{n\times n}$)

事实上,$P(i,j)A$(或 $AP(i,j)$)相当于 A 的第 i 行(列)与第 j 行(列)对换,$P(i,j)AP(i,j)$与 A 合同、相似、正交相似.

$P(i(k))A$(或 $AP(i(k))$)相当于 A 的第 i 行(或列)乘以 k,$P(i(k))AP(i(k))$与 A 合同,但不相似. $P(i(k))AP(i(\frac{1}{k}))$与 A 相似.

$P(i,j(k))A$(或 $AP(i,j(k))$)相当于把 A 的第 j 行(i 列)乘以 k 加到第 i 行(j 列)上去.

$P(i,j(k))AP(j,i(k))$与 A 合同

$P(i,j(k))AP(i,j(-k))$与 A 相似.

(3)方阵 A 非奇异的充要条件是 A 等于若干个初等矩阵的乘积.

(4)矩阵 A 与 B 等价的充要条件是秩 A=秩 B

(5)秩 $A_{m\times n}=r\Longleftrightarrow$存在非奇异阵 $P_{m\times m}$与 $Q_{n\times n}$

使 $PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ (称为矩阵 A 的等价标准形)

证明 ∵对 A 的行及列施行初等变换总可化为$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore \exists$,P,Q 是非奇异的，使 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

P,Q 均为若干个初等矩阵之积

3. 例题

例 11 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 r，则对 A 施行行初等变换(或列变换)可使后 $m-r$ 行(或后 $n-r$ 列)化为零.

证明 $\because$ 秩 $A=r$， $\therefore$ 存在非奇异阵 $P_{m\times m}$， $Q_{n\times n}$ 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}，\ PA=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AQ=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=(P_1,0)$$

P,Q 均为初等矩阵之积

例 12 证明：满秩矩阵 A 可施行行(或列)初等变换将其化为单位矩阵 E.

证明 $\because A$ 非奇异， $\therefore$ 存在 A^{-1}，使 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

A^{-1}非奇异， A^{-1}等于初等矩阵之积.

$A^{-1}A=E$ 表示对 A 的行施行初等变换可化为 E

$AA^{-1}=E$ 表示对 A 的列施行初等变换可化为 E

例 13 设 n 阶方阵 A 的秩为 r，则 A 相似于一个后 $n-r$ 行为零的 n 阶方阵.

证明 由例 11，存在满秩阵 P 使 $PA=\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} Q_1P^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

四、矩阵的运算与矩阵秩的关系，矩阵的满秩分解

矩阵的秩是矩阵本身的性质，掌握好有关矩阵秩的知识对解决某些矩阵问题是很有效的.

(1)矩阵 $A_{m\times n}$的秩等于 r 的充要条件是存在秩为 r 的两个矩阵 $M_{m\times r}$， $N_{r\times n}$使 $A=MN$

证明 $\Longleftarrow$ 由例 11，秩 $M_{m\times r}=r$，则存在非奇异矩阵 $P_{m\times m}$，使 M 的后 $m-r$ 行化为 0， 即

$PM=\begin{pmatrix} B_r \\ 0 \end{pmatrix}$， B_r 为 r 阶非奇异阵. 同理，存在 n 阶非奇异阵 Q， 使 $QN^T=\begin{pmatrix} C_r \\ 0 \end{pmatrix}$， $|C_r|\neq 0$，于是

$$PAQ^T=PMNQ^T=(PM)(QN^T)^T=\begin{pmatrix} B_r \\ 0 \end{pmatrix}(C_r^T \quad 0)=\begin{pmatrix} B_rC_r^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|B_rC_r^T|\neq 0$， 秩 $PAQ^T=$秩 $A=r$

$\Longrightarrow$ 秩 $A=r$， 由初等矩阵的性质⑤， 存在非奇异阵 $P_{m\times n}$， $Q_{n\times n}$， 使 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

进行分块处理，令 $P^{-1}=(M,M_1)$， M 为 r 列阵，

$Q^{-1}=\begin{pmatrix} N \\ N_1 \end{pmatrix}$， N 为 $r\times n$ 矩阵，秩 $M=$秩 $N=r$

则 $A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}=(M,M_1)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ N_1 \end{pmatrix}=MN$

必要性的第二种证法：

对矩阵 A 的行施行初等变换化为行等价标准形 B. 使 B 的后 $m-r$ 行为零，且 B 中有 r 个互不相同的单位列向量. 即存在 m 阶非奇异矩阵 P，使

$PA=B=\begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 B_1 为 $r\times n$ 矩阵，再对 B 的列施行交换使其中 r 个单位向量列位于前面.

即存在 n 阶非奇异阵 Q，使 $BQ=\begin{pmatrix} E_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 这样，

$$PAQ=BQ=\begin{pmatrix} E_r & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}(E_r \quad D)$$

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}(E_r,D)Q^{-1}=MN$$

这里， $M=P^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$， $N=(E_r \quad D)Q^{-1}=B_1$

M 即是由 A 中的与 B 中 r 个单位向量列对应的列组成的.

显然，秩 $M=r=$ 秩 N

例 14 对 A 进行满秩分解

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

解 对 A 的行施行初等变换化为标准形 B

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

则 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

我们说，矩阵的满秩分解，不是唯一的．但有，

若有 $A=MN$，又有 $A=GF$，则存在 $Q_{r\times r}$

使 $M=GQ$， $N=Q^{-1}F$

事实上，$MN=GF$， $MNN^H=GFN^H$，

秩 $NN^H=$ 秩 $N=r$， NN^H 为非奇异的．

$M=GFN^H(NN^H)^{-1}=GQ_1$

其中，$Q_1=FN^H(NN^H)^{-1}$

同理可得，$N=(M^HM)^{-1}M^HGF=Q_2F$

$Q_2=(M^HM)^{-1}M^HG$

$MN=GF=GQ_1Q_2F$

$G^H(GF)F^H=G^HGQ_1Q_2FF^H$

得 $E=Q_1Q_2$．若记 $Q=Q_1$， 则 $Q^{-1}=Q_2$

(2)秩 $A^*=\begin{cases}n\Longleftrightarrow \text{秩 } A=n\\ 1\Longleftrightarrow \text{秩 } A=n-1,\ (A^* \text{为 } A \text{ 的伴随矩阵})\\ 0\Longleftrightarrow \text{秩 } A<n-1,\end{cases}$

证明 充分性：若秩 $A=n$， 则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$

$|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$， 所以 秩 $A^*=n$

若秩 $A=n-1$， $|A|=0$，

$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=0$

又有 $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j)$

即 A^*的列向量均为 $AX=0$ 的解，而齐次方程组 $AX=0$ 的解空间是一维的. A^*中有非零元，故秩 $A^*=1$

若秩 $A<n-1$，则 $A_{ij}=0$， 故秩 $A^*=0$

必要性：若秩 $A^*=n$， 则 $|A^*|=|A|^{n-1}\neq 0$，

$\therefore |A|\neq 0$，即秩 $A=n$

若秩 $A^*=1$， $|A^*|=0$， $|A|=0$，存在 $A_{ij}\neq 0$， 所以秩 $A=n-1$

若秩 $A^*=0$， 则 $A_{ij}=0$， $|A|=0$， $\therefore$秩 $A<n-1$

(3)秩$(AB)\leqslant min($秩 A，秩 $B)$ （证略）

(4)秩$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=$秩 $A+$秩 B （证略）

(5)秩$(A,B)\leqslant$秩 $A+$秩 B

证明 $(E,E)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=(A,B)$

$\therefore$ 秩$(A,B)\leqslant$秩$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=$秩 $A+$秩 B

(6)秩$(A\pm B)\leqslant$秩 $A+$秩 B

证明 设 秩 $A_{m\times n}=r$，秩 $B_{m\times n}=s$，

由(1) 知，$A=M_{m\times r}N_{r\times n}$， $B=G_{m\times s}H_{s\times n}$

$\therefore A\pm B=MN\pm GH=(M,G)\begin{pmatrix} N \\ \pm H \end{pmatrix}$

由第 3，秩$(A+B)\leqslant$秩$(M,G)\leqslant$秩 $M+$秩 $G=r+s=$秩 $A+$秩 B

(7)秩 $AB\geqslant$秩 $A+$秩 $B-B$ 的行数.

证明 设秩 $A_{m\times n}=r$，秩 $B_{n\times s}=t$

则存在非奇异矩阵 P,Q， 使 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}B=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C$$

$$=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

秩$\begin{pmatrix} C_1 \\ 0 \end{pmatrix}$=秩 $C_1\geqslant$秩 $C-(n-r)$=秩 $C+r-n$=秩 B+秩 $A-n$

这样，秩 AB 的范围：min(秩 A，秩 B)$\geqslant$秩 AB

$\geqslant$秩 A+秩 $B-B$ 的行数.

下面我们给出 AB 的确切秩.

(8)秩 AB= 秩 B—维数(B 的值域$\cap A$ 的核)

=秩 A—维数(A'的值域$\cap B'$的核)

证明 我们说，$B_{n\times s}$是线性空间 R^s 到 R^n 的线性映射，$A_{m\times n}$是 $R^n\longrightarrow R^m$ 的线性映射，B 的值域 $B(R^s)\subseteq R^n$，$A_{m\times n}$的核 $A_{m\times n}^{-1}(0)=N(A_{m\times n})\subseteq R^n$， $A_{m\times n}$也是 $B(R^s)$到 R^m 的线性映射，即

$$A(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix})=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\in R^m$$

其值域为 $AB(R^s)$，设 Z 属于其核，$AZ=0$；

$Z\in B(R^s)\subseteq R^n$，存在 $Z_1\in R^s$，使 $Z=BX_1$，$ABX_1=0$

所以，A 的核为 $N(A)=B$ 的值域$\cap A$ 的核. 后面的 A 看作是 $R^n\longrightarrow R^m$ 的线性变换.

但我们知道：一个线性变换的值域的维数与其核的维数的和等于原来线性空间的维数.

所以，维数 $B(R^s)$＝维数 $AB(R^s)$＋维数（B 的值域$\cap A$ 的核）

即，秩 B＝秩 AB＋维数（B 的值域$\cap A$ 的核）

故，秩 AB＝秩 B－维数（B 的值域$\cap A$ 的核）

同理　维 $A'(R^m)$＝维 $B'A'(R^m)$＋维（A'的值域$\cap B'$的核）

即　秩 AB＝秩 A－维（A'的值域$\cap B'$的核）

(9)秩$(A_{m\times n}+B_{m\times n})$＝秩 A＋秩 B －维数（$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的值域$\cap(E_m,E_m)$的核）－维数（$A'$的值域$\cap B'$的值域）

证明　应用上面的结论

$$(E_m,E_m)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=A+B$$

秩$(A+B)$＝秩$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$－维数（$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的值域$\cap(E_m,E_m)$的核）

而，秩$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$＝秩$(A^T,B^T)$＝维数（$(A^T,B^T)$的值域）

＝维数（A^T 的值域＋B^T 的值域）

＝维数（A^T 的值域）＋维数（B^T 的值域）

－维数（A^T 的值域$\cap B^T$ 的值域）

代入即得证.

(10)秩 $ABC\geqslant$秩 AB＋秩 BC－秩 B

这里，A 为 $m\times n$ 矩阵，　B 为 $n\times s$ 阵，　C 为 $s\times t$ 阵.

证明　设秩 $B=r$，则存在秩为 r 的矩阵 $M_{n\times r}$及 $N_{r\times s}$ 使 $B=MN$

秩 ABC＝秩 $AMNC$

$\geqslant$秩 AM＋秩 NC－NC 的行数

＝秩 AMN＋秩 MNC－秩 B

$=$秩 $AB+$秩 $BC-$秩 B

(11)若 $AB=0$,则秩 $A+$秩 $B\leqslant n$, 这里 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times s$ 矩阵.

证明 $0=$秩 $AB\geqslant$秩 $A+$秩 $B-B$ 的行数

$\therefore$秩 $A+$秩 $B\leqslant n$

(12)若 P、Q 均为可逆矩阵,则秩 $AP=$秩 $QA=$秩 A.

(13)若 G 为列向量组线性无关的矩阵,H 为行向量组线无关的矩阵,则秩 $GA=$秩 $AH=$秩 A

证明 设 $A_{m\times n}$, 而 $G_{s\times m}$, 秩 $G=m$,对 G 施行行初等变换可使 G 的后 $s-m$ 行化为零. 即存在非奇异阵 $P_{s\times s}$ 使

$$PG=\begin{pmatrix}G_1\\0\end{pmatrix},\quad PGA=\begin{pmatrix}G_1\\0\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}G_1A\\0\end{pmatrix},$$

秩 $G_1=m$

所以,秩$(GA)=$秩$(PGA)=$秩 $G_1A=$秩 A

同理:秩 $AH=$秩 A

例 15 设 A 为 n 阶方阵,证明:秩$(A^n)=$秩$(A^{n+1})=\cdots$

证法一 若$|A|\neq 0$,则 $A,A^2,\cdots,A^n,A^{n+1}\cdots$的秩均为 n.
若
$|A|=0$, 则 $n\geqslant$秩 $A\geqslant$秩 $A^2\geqslant$秩 $A^3\geqslant\cdots\geqslant$秩$(A^n)\geqslant$秩$(A^{n+1})\geqslant 0$.

因为小于 n 的非负整数只有 n 个,所以上面不等式中必有两个是相等的:秩$(A^k)=$秩(A^{k+i})($k\leqslant n$, $i\geqslant 1$)

则有 秩$(A^k)=$秩$(A^{k+1})=\cdots=$秩(A^{k+i})

$$\begin{aligned}秩(A^{k+i+1})&=秩(A^iA^kA)\\&\geqslant秩(A^kA^i)+秩(AA^k)-秩 A^k\\&=秩 A^k+秩 A^k-秩 A^k=秩 A^k\end{aligned}$$

又发秩 $A^{k+i+1}\leqslant$ 秩 A^k， $\therefore$ 秩$^{k+i+1}=$ 秩 A^k

用归纳法可证得

秩 $A^k=$ 秩 $A^{k+1}=\cdots=$ 秩 $A^{k+i}=$ 秩 $A^{k+i+1}=\cdots$

因为 $k\leqslant n$， 故必有 秩 $A^n=$ 秩 $A^{n+1}=\cdots$

证法二

秩 $A^k=$ 秩 A^{k+1}， 则 $A^kX=0$ 与 $A^{k+1}X=0$ 同解.

由此可推出 $A^{k+1}X=0$ 与 $A^{k+2}X=0$ 同解.

事实上，$A^{k+1}X=0$ 的解是 $A^{k+2}X=0$ 的解

反之，设 $A^{k+2}X=0$ 的解为 X_0， 有 $A^{k+2}X_0=0$

即 AX_0 为 $A^{k+1}X=0$ 的解， 则 AX_0 亦为 $A^kX=0$ 的解，

即 $A^kAX_0=0$， 即 $A^{k+1}X_0=0$

因此，秩 $A^{k+1}=$ 秩 A^{k+2}

同理 秩 $A^k=$ 秩 $A^{k+1}=$ 秩 $A^{k+2}=\cdots=$ 秩 $A^n=$ 秩 A^{n+1}
$=\cdots$

例 16 若 p 个 n 阶方阵之积为零，即 $A_1A_2\cdots A_p=0$

则 秩 A_1+ 秩 $A_2+\cdots+$ 秩 $A_p\leqslant(p-1)n$

证明 $0=$ 秩$(A_1A_2\cdots A_p)$

$\geqslant$ 秩 A_1+ 秩$(A_2A_3\cdots A_p)-n$

$\geqslant$ 秩 A_1+ 秩 A_2+ 秩$(A_3A_4\cdots A_p)-2n$

$\geqslant$ 秩 A_1+ 秩 $A_2+\cdots+$ 秩 $A_p-(p-1)n$

$\therefore$ 秩 A_1+ 秩 $A_2+\cdots+$ 秩 $A_p\leqslant(p-1)n$

例 17 n 阶矩阵 A， 适合 $A^2=E$（这时称 A 为对合矩阵）则 秩$(E+A)+$ 秩$(E-A)=n$

证明 $\because(E+A)(E-A)=E-A^2=0$

则 秩$(E+A)+$ 秩$(E-A)\leqslant n$

又 秩$(E+A+E-A)=$ 秩 $2E$

$=n\leqslant$ 秩$(E+A)+$秩$(E-A)$

$\therefore$ 秩$(E+A)+$秩$(E-A)=n$

例 18 n 阶矩阵 A 的秩小于 $n-1$， 求证对于任意 n 元列向量 u 与 v， 矩阵 $A+uv'$ 均奇异

证明 $\because$ 秩$(uv')\leqslant$ 秩 $u\leqslant 1$

又 秩$(A+uv')\leqslant$ 秩 $A+$秩$(uv')<n-1+1=n$

$\therefore$ $|A+uv'|=0$，即 $A+uv'$ 奇异

例 19 设矩阵 $A_{s\times n}$， 求证

秩$(E_s-AA')-$秩$(E_n-A'A)=s-n$

证明 作矩阵

$B=\begin{pmatrix}E_s & A\\ A' & E_n\end{pmatrix}$， 对 B 施行初等变换，相当于：

$$\begin{pmatrix}E_s & A\\ A' & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_s & 0\\ -A' & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_s-AA' & A\\ 0 & E_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}E_s & 0\\ -A' & E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_s & A\\ A' & E_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_s & A\\ 0 & E_n-A'A\end{pmatrix}$$

秩 $B=$秩$(E_s-AA')+n=$秩$(E_n-A'A)+s$

$\therefore$秩$(E_s-AA')-$秩$(E_n-A'A)=s-n$

五、逆矩阵

1. 左逆矩阵(右逆矩阵)

定义 若 $B_{k\times n}\cdot A_{n\times k}=E$， 则称 B 为 A 的左逆矩阵，而 A 是 B 的右逆矩阵.

性质 矩阵 $A_{n\times k}$ 存在左逆阵(右逆阵)的充要条件为 A 的列向量组(行向量组)线性无关，且 A 的左(右)逆矩阵唯一的充要条件为 A 的行(列)也线性无关，即 A 为非奇异方阵.

证明 存在性$\Longleftarrow$ A 的列向量组线性无关.

秩 $A'A$=秩 $A=A$ 的列数. $A'A$ 非奇异,存在$(A'A)^{-1}$

取 $B=(A'A)^{-1}A'$, 则 $BA=E$, B 为 A 的左逆阵.

$\Longrightarrow B$ 为 A 的左逆阵, $BA=E_k$

则 k=秩 E_k=秩 $BA\leqslant$秩 $A\leqslant$列数 k $\therefore$秩 $A=k$

因此, A 的列向量组线性无关.

证唯一性:若有 $B_1A=E_k$, $B_2A=E_k$

则 $B_1=B_2\Longleftrightarrow(B_1-B_2)=0\Longleftrightarrow(B_1-B_2)A=0$, A 不是右零因子$\Longleftrightarrow$秩 $A=n$, 但秩 $A=k$, $\therefore k=n$, A 为非奇异阵.

2. 逆矩阵

(1)n 阶矩阵 A 可逆的充要条件有:

①存在方阵 B, 使 $AB=BA=E$, 记 $B=A^{-1}$,

②A 非奇异(非退化), 即$|A|\neq 0$,

③秩 $A=n$,

④A 的特征值全不为零,

⑤A 等于若干个初等矩阵之积,

(2)求逆矩阵的方法

①公式法

$$AX=E,\quad A(X_1,X_2,\cdots X_n)=(e_1,e_2,\cdots,e_n)$$

$AX_i=e_i$, $i=1,2,\cdots,n$

$$\begin{cases} x_{1i}=\dfrac{A_{i1}}{|A|} \\ x_{2i}=\dfrac{A_{i2}}{|A|} \\ \cdots \quad \cdots \\ x_{ni}=\dfrac{A_{in}}{|A|} \end{cases}$$

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的伴随矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

这里 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式

则有 $AA^{*}=A^{*}A=|A|E$， $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=X$

②初等变换法

若 A 可逆，则对 A 的行及列施行初等变换可以化为 E（单位矩阵），即存在若干个初等矩阵 P_i, Q_j 使

$$Q_tQ_{t-1}\cdots Q_1AP_1P_2\cdots P_k=E$$

$$A=Q_1^{-1}Q_2^{-1}\cdots Q_t^{-1}P_k^{-1}P_{k-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}$$

$$A^{-1}=(P_1P_2\cdots P_k)(Q_t\cdots Q_1)=BC$$

这样，对矩阵 $\begin{pmatrix} A & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ 施行初等变换化为 $\begin{pmatrix} E & C \\ B & 0 \end{pmatrix}$

算出 $BC=A^{-1}$

B、C 亦可一次求出， $\because CAB=E$， $CEA(-E)B=-E$

$A=C^{-1}(-E)B^{-1}(-E)$， $A^{-1}=BC$

$\therefore$ 对矩阵 $\begin{pmatrix} -E & 0 \\ A & E \end{pmatrix}$ 进行初等变换化为

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ -E & C \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & BC \\ -E & C \end{pmatrix}, \quad BC = A^{-1}$$

③"行"初等变换法

若 A 可逆，对 A 的行进行初等变换可以化为单位矩阵，即有 $Q_m Q_{m-1} \cdots Q_1 A = E$，其中 Q_i 为初等矩阵。

$$A = Q_1^{-1} Q_2^{-1} \cdots Q_m^{-1}, \quad A^{-1} = Q_m Q_{m-1} \cdots Q_1$$

这里只须对矩阵 (A, E) 的行进行初等变换化为 (E, C)，即可求出 $A^{-1} = C$

④"列"初等变换法

同上的道理，对 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix}$，则 $A^{-1} = D$

(3)有关性质

①$(AB)^* = B^* A^*$　②$(A^*)' = (A')^*$

③$|A^*| = |A|^{n-1}$　④$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

⑤$(A^{-1})' = (A')^{-1}$　⑥$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

⑦$|A^{-1}| = |A|^{-1}$

这里只证①与⑥，其余的自己证明

①的证明：设　$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), AB = G = (g_{ij})$

$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$，　G^* 的第 i 行第 j 列的元素为 G_{ji}

$$G_{ji} = (-1)^{j+i} \det G\begin{pmatrix} 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n \\ 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{j+i} \sum_{h_1 \cdots h_{n-1}} \det A\begin{pmatrix} 1, & \cdots, j-1, j+1, \cdots, & n \\ h_1, & h_2, \cdots, & h_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\det B\begin{pmatrix} h_1, & h_2, \cdots, & h_{n-1} \\ 1, & \cdots, i-1, i+1, \cdots, & n \end{pmatrix}$$

($h_1,\cdots,h_{n-1}$是 $1,2,\cdots n$ 中取 $n-1$ 个的组合).

$$=(-1)^{j+1}\det A\begin{pmatrix}1, & \cdots,j-1,j+1,\cdots, & n\\2, & 3,\cdots, & n\end{pmatrix}$$

$$(-1)^{i+1}\det B\begin{pmatrix}2, & 3,\cdots, & n\\1, & \cdots,i-1,i+1,\cdots, & n\end{pmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{j+n}\det A\begin{pmatrix}1, & \cdots,j-1,j+1, & n\\1, & 2,\cdots, & n-1\end{pmatrix}$$

$$(-1)^{i+n}\det B\begin{pmatrix}1, & 2,\cdots, & n-1\\1, & \cdots,i-1,i+1,\cdots, & n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}B_{ki}$$

此即 B^*之第 i 行与 A^*之第 j 列相应元素乘积之和，所以 $(AB)^*=G^*=B^*A^*$

⑥的证明：若 $|A|\neq 0$， 则 $A^*\neq 0$， $A^*=|A|A^{-1}$ 从而，

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}$$
$$=|A|^{n-1}|A|^{-1}A=|A|^{n-2}A$$

若 $|A|=0$， 则秩 $A^*\leqslant 1$， 从而 $(A^*)^*=0$， 这时，$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，亦成立.

例 20 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$

则 $\det A^*\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_m\\i_1 & i_2 & \cdots & i_m\end{pmatrix}=|A|^{m-1}$〔代余式 $A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_m\\j_1 & \cdots & j_m\end{pmatrix}$〕

特别地， $\hat{A}ij=a_{ij}|A|^{n-2}$，这里，$\hat{A}_{ij}$是 A_{ij}在 A^* 中的代数余子式.

解 可以假设 $\det A^*\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_m\\i_1 & i_2 & \cdots & i_m\end{pmatrix}$位于 A^* 的左上角

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1m} & A_{2m} & \cdots & A_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{1,m+1} & A_{2,m+1} & \cdots & A_{m,m+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$$= |A| \det A^* \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & a_{1,m+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & |A| & a_{m,m+1} & \cdots & a_{mn} \\ & & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,n} \\ & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & a_{n,m+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= |A|^m \cdot \tilde{M}$$

这里，$\tilde{M}$为 $\det A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$在 A 中的余子式

(当 $\det A^*\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$不在 A^* 的左上角，可依次交换邻行或邻列变到左上角去，同样可得)

当$|A|\neq 0$时，等式成立

当$|A|=0$时，若秩 $A\leqslant n-2$，则 $A_{ij}=0$，等式成立

若秩 $A=n-1$，则秩 $A^*=1$，又若 $m\geqslant 2$ 时，等式成立.

$m=1$ 时，$\det A^*\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}=A_{ij}$，这时 $\tilde{M}=A_{ij}$，所以等

式亦成立.

另外，当 $m=n-1$ 时，$\det A^*\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_{n-1} \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1}\end{pmatrix}$

$=|A|^{n-2}$〔代余式 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{n-1} \\ j_1 & \cdots & j_{n-1}\end{pmatrix}$〕

设 $\det A^*\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_{n-1} \\ i_1 & \cdots & i_{n-1}\end{pmatrix}$在 A^* 中的余子式为 A_{ij}，

则 $\det A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{n-1} \\ j_1 & \cdots & j_{n-1}\end{pmatrix}$在 A 中的余子式为 a_{ij}

因此 $(-1)^t\hat{A}_{ij}=\det A^*\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_{n-1} \\ i_1 & \cdots & i_{n-1}\end{pmatrix}$

$=|A|^{n-2}(-1)^t a_{ij}$

所以 $\hat{A}_{ij}=|A|^{n-2}a_{ij}$

例 21 n 阶矩阵$(n\geqslant 3)A=(a_{ij})$，a_{ij}的余子式为 M_{ij}，

设 $\overset{\triangle}{A}=\begin{vmatrix} M_{11} & M_{21} & \cdots & M_{n1} \\ M_{12} & M_{22} & \cdots & M_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{1n} & M_{2n} & \cdots & M_{nn}\end{vmatrix}=(M_{ji})$

则 $(\overset{\triangle}{A})^{\triangle}=|A|^{n-2}A$

证明 $A^*=(A_{ji})$ 则

$$\overset{\triangle}{A}=(M_{ji})=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}A^*\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$=CA^*C$

此即对 A^* 进行合同变换（将 A^* 的二行二列；四行四列；

六行六列；…，均分别乘以(－1)得到 $\overset{\triangle}{A}$

同理 $(\overset{\triangle}{A})^{\triangle}=C(\overset{\triangle}{A})^{*}C=C(CA^{*}C)^{*}C=CC^{*}(A^{*})^{*}C^{*}C$

$=|C|E(A^{*})^{*}|C|E=(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}A$

六、广义逆矩阵

定义 1 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若存在 $n\times m$ 矩阵 B，使 $ABA=A$，称 B 为 A 的广义逆矩阵，记 $B=A^{-}$.

定义 2 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，若存在 $n\times m$ 矩阵 B，使

①$ABA=A$ ②$BAB=B$

③$(AB)'=AB$ ④$(BA)'=BA$

称 B 是 A 的莫尔——本洛斯(Moore—Penrose)广义逆矩阵．记为，$B=A^{+}$

例 22 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\overline{A}'=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 0\end{pmatrix}$，

$A^{+}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ (a 为任意数)

命题 1 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A^{-}是存在的，且不是唯一存在的.

证明 设秩 $A=r$，则存在 m 阶非退化阵 P 及 n 阶非退化阵 Q，使

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=F$$

令 $B=QF'P=(Q_1,Q_2)F'\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}=Q_1P_1.$

$ABA=P^{-1}FQ^{-1}QF'PP^{-1}FQ^{-1}=P^{-1}FQ^{-1}=A$

即 $B=A^{-}$，又令 $G=Q\begin{pmatrix}E_r & C\\D & S\end{pmatrix}P$

这里，C,D,S 分别为任意的 $r\times(m-r)$，$(n-r)\times r$ 及 $(n-r)\times(n-r)$ 矩阵

则有，$AGA=P^{-1}FQ^{-1}Q\begin{pmatrix}E_r & C\\ D & S\end{pmatrix}PP^{-1}FQ^{-1}$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & C\\ D & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$$

$=P^{-1}FQ^{-1}=A$， 即 $G=A^-$

命题 2 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，则 A^+ 是唯一存在的.

证明 作 A 的满秩分解：$A=HL$

其中，H 是 $m\times r$ 列满秩阵，(秩 $A=r$)，

L 是 $r\times n$ 行满秩阵.

则 $L^+=L'(LL')^{-1}$， $H^+=(H'H)^{-1}H'$.

令 $B=L^+H^+=L'(LL')^{-1}(H'H)^{-1}H'$， 则 $B=A^+$

若 $n\times m$ 阵 C，也有 $C=A^+$(即满足①—④)

则 $B=BAB=BACAB=B(AC)'(AB)'=B(ABAC)'$
$=B(AC)'=BAC$

$C=CAC=CABAC=(CA)'(BA)'C=(BACA)'C$
$=(BA)'C=BAC$

所以，$B=C$，上述证明是构造性的.

推论 (1) AA^-, A^-A, AA^+, A^+A 是幂等阵.

(2) 秩 $AA^-=$ 秩 $A=$ 秩 A^-A

秩 $A=$ 秩 $A^+=$ 秩 $AA^+=$ 秩 A^+A

(3) $(A^+)^+=A$

(4) $(A')^+=(A^+)'$

(5) $(A'A)^+=A^+(A^+)'$

证明 (1) 验证即可

(2) 秩 A=秩 $AA^{-}A\leqslant$ 秩 $AA^{-}\leqslant$ 秩 A

则 秩 A=秩 AA^{-}=秩 $A^{-}A$

同理， 秩 A=秩 A^{+}=秩 AA^{+}=秩 $A^{+}A$

(3) 是由于 A 与 A^{+}的地位是对称的.

(4),(5)由验证①——④式即得

例 23 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&2\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&4\end{pmatrix}=HL$

$$H^{+}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix}^{+}=(H'H)^{-1}H'=\begin{pmatrix}5&2\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&-2\\-2&1&5\end{pmatrix}$$

$$L^{+}=L'(LL')^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\-4&17\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}17&4\\4&2\\-1&4\end{pmatrix}$$

$$A^{+}=L^{+}H^{+}=\frac{1}{54}\begin{pmatrix}13&19&-7\\2&5&1\\5&1&11\end{pmatrix},\quad A^{-}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

利用矩阵的初等变换可以求 A^{-},A^{+}

命题 3 设 A 为 $m\times n$ 阵,则齐次线性方程组 $AX=0$ 的全部解为$(E_n-A^{-}A)Z$. 这里,Z 为任意 n 元列向量.

证明 首先,$A(E_n-A^{-}A)Z=AZ-AA^{-}AZ=0$

其次,设秩 $A=r$， 有秩 $A^{-}A=r$

因 $A^{-}A$ 是幂等阵,故存在非退化阵 P

使 $P^{-1}A^{-}AP=\begin{pmatrix}E_r&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$P^{-1}(E_n-A^-A)P=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & E_{n-r}\end{pmatrix},\quad 故秩(E_n-A^-A)=n-r$$

E_n-A^-A 的列向量生成的子空间即是方程组 $AX=0$ 的解空间,因此,$(E_n-A^-A)Z$ 为 $AX=0$ 的全部解

命题 4 设 A 为 $m\times n$ 阵,则线性方程组 $AX=b$,有解的充要条件是:$AA^-b=b$. 当 $AX=b$ 有解时,它的任意解可表为 $X_1=A^-b+(E_n-A^-A)\delta$, δ 为任意 n 元列向量.

证明 $\Longrightarrow AX=b$ 有解 α, $b=A\alpha=AA^-A\alpha$ $=AA^-b$

$\Longleftarrow$若 $AA^-b=b$, 则 A^-b 为一个解

另外,$AX=b$ 的解的一般形式:$X_1=A^-b+\xi$,

A^-b 为的 $AX=b$ 特解,ξ 是 $AX=0$ 的通解.

则由命题 3 知 $\xi=(E_n-A^-A)\delta$,

故 $X_1=A^-b+(E_n-A^-A)\delta$

七、矩阵方程 $AX=B$

命题 1 矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s}$有解的充分必要条件是秩 $A=$秩$(A,B)=r$, $0\leqslant r\leqslant min(m,n)$. 在有解时,当 $r=n$,有唯一解; 当 $r<n$ 时,有无穷多个解.

证明 $\Longleftarrow$秩 $A=$秩$(A,B)=r$. A 的列向量组的极大无关组即为矩阵(A,B)的列向量的极大无关组.

因此,B 的列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由 A 的列向量线性表示,即 $\beta_i=A\begin{pmatrix}C_{1i}\\C_{2i}\\\vdots\\C_{ni}\end{pmatrix}$, 令 $C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1s}\\C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2s}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{ns}\end{pmatrix}$

则 $AC=B$， 即 C 为 $AX=B$ 的解

$\Longrightarrow$：$AX=B$ 有解 C，即 $AC=B$，则有 B 的列向量是 A 的列向量的线性组合，因而，A 的列向量组与(A,B)的列向量组等价.

所以，秩 $A=$秩(A,B)

在有解时，$AX=B$ 有唯一解$\Longleftrightarrow$线性方程 $AX_i=\beta_i$ 有唯一解$\Longleftrightarrow r=n$， 所以当 $r=n$ 时，$AX=B$ 有唯一解.

当 $r<n$ 时， $AX=B$ 有无穷多个解.

下面，我们讨论，当 $AX=B$ 有无穷多个解时，解的结构.

称 $AX=0$ 为 $AX=B$ 的导出方程. 以线性方程组

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$ 的基础解系为列作成的矩阵

$G_{n\times(n-r)}$称为导出方程 $AX=0_{m\times s}$的解的基础矩阵（注意，G 不一定是 $AX=0$ 的解）

命题 2 矩阵 $D_{n\times s}$是导出方程 $AX=0_{m\times s}$的解的充要条件是存在矩阵 $F_{(n-r)\times s}$使 $D_{n\times s}=GF$

这里， G 为 $AX=0_{m\times s}$的解的基础矩阵.

证明 $\Longrightarrow$存在 $D_{n\times s}$使 $AD=0_{m\times s}$

则 D 的列向量是齐次线性方程组

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$ 的解

因而，可由该齐次线性方程组的基础解系：

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$线性表示：

即 $\gamma_1=f_{11}\xi_1+f_{21}\xi_2+\cdots+f_{n-r,1}\xi_{n-r}$

$\gamma_2=f_{12}\xi_1+f_{22}\xi_2+\cdots+f_{n-r,2}\xi_{n-r}$

……………………………………

$\gamma_s=f_{1s}\xi_1+f_{2s}\xi_2+\cdots+f_{n-r},s\xi_{n-r}$

即有： $D=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s)$

$$\doteq(\xi_1,\xi_2\cdots,\xi_{n-r})\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-r,1} & f_{n-r,2} & \cdots & f_{n-r,s} \end{pmatrix}$$

$=GF$

$\Longleftarrow\forall$ $F_{(n-r)\times s}$， 令 $GF=D$， D 的列向量是 G 的列向量的线性组合，因而是齐次线性方程组

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\text{的解}$$

所以 $AD=0_{m\times s}$

命题3 设矩阵 $C_{n\times s}$ 为方程 $AX=B$ 的解，(秩 A=秩$(A,B)=r$)，则矩阵 $M_{n\times s}$ 为 $AX=B$ 的解的充要条件是存在矩阵 $F_{(n-r)\times s}$ 使 $M=C+GF$，这里 G 为导出方程 $AX=0_{m\times s}$ 的解是基础矩阵.

这样， $\forall F_{(n-r)\times s}$， 矩阵 $C+GF$ 均为 $AX=B$ 的解.

证明 $\Longrightarrow$ 使 $AM=B$，又 $AC=B$， 相减有 $A(M-C)=0_{m\times s}$ $\therefore M-C$ 是导出方程 $AX=0_{m\times s}$ 的解，由命题2，存在矩阵 $F_{(n-r)\times s}$ 使 $M-C=GF$

因此， $M=C+GF$

$\Longleftarrow$ $\forall$ $F_{(n-r)\times s}$， 矩阵 GF 为 $AX=0_{m\times s}$ 的解，

即有 $AGF=0_{m\times s}$， 又 $AC=B$，相加有 $A(C+GF)=B$ 即 $C+GF$ 为 $AX=B$ 的解

例 24 解方程 $AX=B$ 这里

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&3\\3&2&1&5\\2&3&-1&5\\2&2&0&4\\5&5&0&10\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-3&-4\\4&-1&0\\1&-4&-5\\2&-2&-2\\5&-5&-5\end{pmatrix}$$

解 设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

解线性方程组 $AX_i=\beta_i$ 得出 $AX=B$ 的固定解 C

$$C=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-1&-5\\1&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix},\quad \text{解齐次方程组}\quad A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

求出基础解系从而得出导出方程 $AX=0_{5\times 3}$ 的解的基础矩阵

$$G=\begin{pmatrix}-1&-2\\1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

所以 $AX=B$ 的一般解为

$$M=C+G\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}$$

其中， a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意数.

注： 矩阵方程 $AX=B$， 当 $S=1$ 时，即为线性方程组，因此，线性方程组解的结构可以作为这里矩阵方程 $AX=B$ 的特殊情况.

下面介绍一种用初等变换解矩阵方程 $AX=B$ 的方法.

设 秩 $A=$秩$(A,B)=r$

对矩阵(A,B)的行施行初等变换,得到行等价标准形

$$(A,B)\longrightarrow C_{m\times(n+s)}=\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots 0 & C_{1,r+1}\cdots C_{1n} & d_{11},\cdots d_{1s} \\ 0 & 1\cdots 0 & C_{2,r+1}\cdots C_{2n} & d_{21}\cdots d_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 1 & C_{r,r+1}\cdots C_{rn} & d_{r1}\cdots d_{rs} \\ 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \end{pmatrix}$$

由矩阵 C 出发作: $n\times(n-r+s)$矩阵 D:

$$D=\begin{pmatrix} C_{1,r+1} & C_{1,r+2} & \cdots C_{1n} & d_{11} & \cdots d_{1s} \\ C_{2,r+1} & C_{2,r+2} & \cdots C_{2n} & d_{21} & \cdots d_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r,r+1} & C_{r,r+2} & \cdots C_{rn} & d_{r1} & \cdots d_{rs} \\ -1 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & -1 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots -1 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & D_1 \\ -E_{n-r} & 0 \end{pmatrix}=(M,N).$$

其中, M 是矩阵 D 的前 $n-r$ 列,N 是 D 的后 S 列,则矩阵 M 的列向量 $\gamma_{r+1},\gamma_{r+2},\cdots\gamma_n$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系;而 N 的列向量 $\eta_1\cdots\eta_s$, 其中 η_i 是线性方程组 $AX=b_i$ 的解, $i=1,2,\cdots,s$, 这里 b_i 是矩阵 B 的第 i 个列向量.

事实上,从矩阵 C 可以看出:给自由未知量:$x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$ 于 $n-r$ 组值,可得齐次线性方程组 $AX=0$ 的 $n-r$ 个

解　$\gamma_{r+1},\gamma_{r+2}\cdots\gamma_n$.

解向量	非自由未知量			自由未知量		
	x_1	x_2 ⋯	x_r	x_{r+1}	$x_{r+2}\cdots$	x_n
γ_{r+1}	$C_{1,r+1}$	$C_{2,r+2}\cdots$	$C_{r,r+1}$	-1	0 ⋯	0
γ_{r+2}	$C_{1,r+2}$	$C_{2,r+2}\cdots$	$C_{r,r+2}$	0	-1 ⋯	0
……	…………	…………	…………	……	……	……
γ_n	C_{1n}	$C_{2n}\cdots$	$C_{r,n}$	0	0 ⋯	-1

$\gamma_{r+1},\gamma_{r+2},\cdots,\gamma_n$ 线性无关，因而是齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系. 这样，矩阵 M 就是导出矩阵方程 $AX=0_{m\times s}$的解的基础矩阵.

同样，从矩阵 C 亦可以看出，向量 η_i 是线性方程组 $AX=b_i$ 的解. 这只须 $x_{r+1}=x_{r+2}=\cdots=x_n=0$，　就有 $x_1=d_{1i},x_2=d_{2i},\cdots,x_r=d_{ri}$

因此，矩阵 N 是矩阵方程 $AX=B$ 的一个特解. 所以，矩阵方程 $AX=B$ 的一般解为：$X=N+MF$. 其中，F 为任意 $(n-r)\times s$ 矩阵.

例如，用初等变换法解例 24 中的矩阵方程.

对矩阵(A,B)的行施行初等变换得

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由矩阵 C 出发作矩阵 D，并进行分块：

$$D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1 & -2 & -3\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=(M,N)$$

则有 $AX=B$ 的一般解

$$X=N+MF=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$$

其中，a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 为任意数.

注 1，对矩阵(A,B)的行施行初等变换所得矩阵 C 中的 r 个互不相同的单位列向量，若不是位于前 r 列（在前 n 列中）．则可通过列的交换使其位于前 r 列得到 C_1，即存在$(n+s)$阶非退化阵 Q（换法 阵之积）使 $CQ=C_1$，且 $Q=\begin{pmatrix}Q_1 & \\ & E_s\end{pmatrix}$. 由 C_1 出发按前法作出矩阵 D_1，这时必须 $Q_1D_1=D$，然后对 D 再进行分块，得到的 M,N 方能给出方程 $AX=B$ 的一般解.

注 2，如前，对矩阵(A,B)的行施行初等变换得到矩阵 C，则方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是矩阵 C 的后 S 列与后 $m-r$ 行相交处的元素全是零.

推论 1 矩阵方程 $XB=C$ 有解的充要条件是

秩 $B=$秩$\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$

证明 将 $XB=C$ 两端转置得

$B'X'=C'$ 有解$\Longleftrightarrow$秩 $B'=$秩(B',C')

即有，秩 $B=$秩$\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$

推论 2 矩阵方程 $AXB=C$ 有解的充要条件是

秩 $A=$秩(A,C)及秩 $B=$秩$\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$

证明 $\Longrightarrow AXB=C$，有解 Z_0

$AZ_0B=C$， 则 Z_0B 为 $AX=C$ 的解，

即得，秩 $A=$秩(A,C)

同理，由 AZ_0 为 $XB=C$ 的解得到， 秩 $B=$秩$\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$

$\Longleftarrow$秩 $A=$秩(A,C)， 则 $AX=C$ 有解 X_0

秩 $B=$秩$\begin{pmatrix}B\\C\end{pmatrix}$，则 $YB=C$ 有解 Y_0

令 $X=X_0C^-Y_0$ （C^- 为 C 的广义逆矩阵）

有 $AXB=AX_0C^-Y_0\ B=CC^-C=C$

推论 3 对于 $m\times n$ 列满秩阵 A，必存在 $n\times m$ 行满秩阵 B，使 $BA=E_n$

证明 $\because n=$秩 $A=$秩$\begin{pmatrix}A\\E_n\end{pmatrix}$

$\therefore\quad XA=E_n$ 有解 B，即 $BA=E_n$

又，$n=$ 秩 $E_n\leqslant$ 秩 $B\leqslant n$

故 秩 $B=n$，B 为行满秩阵.

推论 4 对于 $m\times n$ 行满秩阵 A，必存在 $n\times m$ 列满秩阵 C，使 $AC=E_m$

证明 $\because m=$ 秩 $A=$ 秩(A,E_m)

$\therefore\quad AX=E_m$，有解 C，使 $AC=E_m$

又，$m=$ 秩 $E_m\leqslant$ 秩 $C\leqslant m$

故，秩 $C=m$，故 C 为列满秩阵.

八、几种特殊矩阵，矩阵的三角分解

1. 数量矩阵——即 kE

以下各条等价

(1) A 是数量矩阵(即 kE)

(2) A 与任意方阵相乘可以交换

(3) A 与任意满秩方阵相乘可以交换

(4) A 与 E_{ij} 相乘可以交换

(5) 任意非零复向量 X 均有 $X^HAX=kX^HX$

(k 为常数，$X^H=\overline{X}'$)

证明 $X^HAX=kX^HX=X^H(kE)X$

$X^H(A-kE)X=0$，对于任 X 均成立 $\Longleftrightarrow A-kE=0$ $\Longleftrightarrow A=kE$

2. 对称矩阵(反对称矩阵)——$A'=A(A'=-A)$

性质 (1) 对称(反)阵之和、差、数积仍是对称(反)阵，或者说，对称(反)阵的任意线性组合仍是对称(反)阵.

(2) 两个对称(反)阵 A 与 B 之积仍为对称(反)阵的充要

条件是 $AB=BA(AB=-BA)$

(3)设 k 为非负整数，A 为对称(反)阵，则 A^k 为对称阵(当 k 为奇数时，A^k 为反对称阵；当 k 为偶数时，A^k 为对称阵)

(4)对称矩阵 A 的任意多项式 $f(A)$ 仍为对称阵，这里 $f(x)$ 为任意多项式.

(5)数域 P 上全体对称(反对称)阵作成线性空间.

(6)若 A 为对称阵，则 A^* 为对称阵，当 A 非奇异时，逆命题成立.

若 A 为反对称阵，则当阶数 n 为偶数时，A^* 为反对称阵；当 n 为奇数时，A^* 为对称阵.

(7)若对称(反对称)阵 A 可逆，则 A^{-1} 仍为对称(反对称)阵.

(8)与对称(反对称)阵合同的阵仍为对称(反对称)阵.

(9)方阵 A，则 $A+A'$，AA'，$A'A$ 均为对称阵.

(10)奇数阶反对称矩阵的行列式为零，从而反对称阵的秩为偶数.

(11)任何矩阵均可唯一地分解为一个对称阵与一个反对称阵之和.

(12)A 为反对称矩阵 $\Longleftrightarrow$ 任意实向量 X 均有 $X'AX=0$

证明 $\Longleftarrow \forall X$，$X'AX=0$，令 $X=e_i+e_j$ 有

$(e_i+e_j)^TA(e_i+e_j)=e_i^TAe_i+e_i^TAe_j+e_j^TAe_i+e_j^TAe_j=0$

$e_i^TAe_j+e_j^TAe_i=0$，$e_i^TAe_j=-e_j^TAe_i$

即 $a_{ij}=-a_{ji}$ $\therefore A$ 为反对称矩阵

$\Longrightarrow$ $\because X'AX$ 是一个数，

$\therefore (X^TAX)^T=X^TA^TX=X^TAX$ $\forall X$ 均成立，

$A^T=-A$，　故$-X^TAX=X^TAX$

因此　$X^TAX=0$

3. **上(下)三角矩阵**

定义　主对角线以下(上)的元素全为零的矩阵，即当 $i>j$　($i<j$)时，　$a_{ij}=0$，称为上(下)三角矩阵；对角线上元素全为 1 的上(下)三角矩阵，称为单位上(下)三角矩阵；对角线上元素全为零的上(下)三角阵称为严格上(下)三角矩阵.

性质　(1)上(下)三角矩阵的和、差、数积、乘积仍为上(下)三角矩阵. 即数域 P 上全体上(下)三角矩阵作成有零因子的非交换环，构成数域 P 上的线性空间.

(2)上(下)三角矩阵的任一多项式，仍为上(下)三角矩阵.

(3)既是上三角矩阵又是下三角矩阵的矩阵是对角矩阵.

(4)若 A 是上(下)三角矩阵，则 A^* 亦为上(下)三角阵.

(5)非奇异阵 A 为上(下)三角阵的充要条件是 A^{-1}也是上(下)三角阵，且 A 与 A^{-1}的对角线上相应的元素互为倒数.

(6)任意矩阵 A，存在非奇异阵 P 与 T，上(下)三角阵 Q 与 S，使 $A=PQ$ 及 $A=ST$.

(7)上(下)三角阵非奇异的充要条件是主对角线上元素全非零.

(8)两个上(下)三角阵乘积矩阵主对角线上的元素是此二上(下)三角阵主对角线上元素之积.

这里只证(4)，(6)，其余自己验证

(4)的证明：$A^*=(d_{ij})=(A_{ji})$，　$A_{ji}=(-1)^{j+i}M_{ji}$，M_{ji}为

a_{ji}在 A 中的余子式. 若 $i>j$ 时,M_{ji}是上三角型的,而 A 中划去第 j 行第 i 列后,$a_{i+1,j}$就成为 M_{ji}的主对角线上的元素. 且对角线以下的元素为零.

∵ $a_{i+1,j}=0$, ∴ $M_{ji}=0$,因而 $A_{ji}=0$

故 A^* 为上三角矩阵.

(6)的证明只须对 A 进行行(或列)初等变换即可.

例 25 设 $AB=C$, C 为上(下)三角阵,则当 A 与 B 之一为非奇异的上(下)三角阵时,另一个必为上(下)三角阵.

(请读者自证)

例 26 设 A 的顺序主子式皆非零,则 A 可以分解成一个非退化的下三角阵与一个非退化的上三角阵的乘积,从而 A 可以唯一地分解成 $A=LDU$. 其中 L 为单位下三角阵,D 为对角阵,U 为单位上三角阵.

(矩阵的三角分解)

证明. ∵A 的顺序主子式均非零

∴可对 A 的行施行若干次消法变换,将其化为上三角阵,即有 $A=LS$. 其中 L 为若干消法矩阵之积,这些消法矩阵 $P(i,j(k))$均有 $i>j$,即为下三角的消法矩阵.

因此,L 为单位下三角阵,S 为非退化的上三角阵. 再对 S 的行施以倍法变换可以将其化为单位上三角阵,即有 $S=DU$,其中 D 是若干个倍法矩阵(是对角阵)之积,D 是对角阵,U 是单位上三角阵.

∴ $A=LDU$. 若还有 $A=L_1D_1U_1$ 满足条件,

则 $LDU=L_1D_1U_1$, $L_1^{-1}L=D_1U_1U^{-1}D^{-1}$,该式左端为单位下三角阵,右端为上三角阵. 故必有 $L_1^{-1}L=E$,即 $L_1=L$

同理,有 $U=U_1$, 又有 $D_1=D$.

下面通过例子说明仅用行的初等变换即可完成矩阵的三角分解：

例 27 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}$ 的顺序主子式皆非零.

对矩阵(E,A)的行施行初等变换

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=(L,S)$$

其中，$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$为单位下三角形阵

$S=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$为非退化上三角阵

即得 $LA=S$

再对 L 的行施行初等变换求 L^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (L^{-1}, E)$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

对 S 的行施行初等变换使其变为单位上三角阵

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (D, U)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即 $DS = U$， $S = D^{-1}U$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

因此，$A=L^{-1}D^{-1}U$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ \frac{3}{2} & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

是 A 的三角分解.

4. 正交矩阵

定义 若有 $AA'=A'A=E$，称 A 为正交矩阵.（$A\in R^{n\times n}$）.

性质 (1)全体正交矩阵作成乘群(证略)

(2)若 A 是正交阵，则 A^T,A^{-1},A^* 均是正交阵(证略)

(3)矩阵 A 是正交阵的充要条件是 $|A|=\pm1$， $|A|=1$ 时，$a_{ij}=A_{ij}$； $|A|=-1$ 时， $a_{ij}=-A_{ij}$

证明 $\Longleftarrow$ $|A|=\pm1$， $AA^*=|A|E$

当 $|A|=1$ 时，$a_{ij}=A_{ij}$，有 $A^*=A'$， $A'A=E$

当 $|A|=-1$ 时，$a_{ij}=-A_{ij}$，有 $A^*=-A'$， $AA^*=-E$

$-AA'=-E$，故 $AA'=E$

因此，A 是正交阵

$\Longrightarrow$ A 是正交阵，$AA'=E$， $|A|^2=1$，

$|A|=\pm1$，当 $|A|=1$ 时，$AA^*=E$， $A^*=A^{-1}=A'$

$\therefore A_{ij}=a_{ij}$

当 $|A|=-1$ 时，$AA^*=-E$， $A^*=-A^{-1}=-A'$

$\therefore A_{ij}=-a_{ij}$

(4)设 A 是正交阵，则

$$\det A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}=|A|〔代余式\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}〕$$

证明 由例 20

$$\det A^*\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}=|A|^{m-1}〔代余式$$

$A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}〕$， 当 $|A|=1$ 时，$A^*=A'$

$$\det A^*\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}=\det A'\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$$

$$=\det A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}=1\cdot〔代余式\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}〕$$

当 $|A|=-1$ 时，$A^*=-A'$

$$\det A^*\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}=\det(-A')\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^m\det A'\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_m \\ i_1 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^m〔代余式\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}〕$$

即 $\det A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}=(-1)〔代余式\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}〕$

总之，有

$$\det A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}=|A|〔代余式\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_m \\ j_1 & \cdots & j_m \end{pmatrix}〕$$

5. 其他特殊矩阵

对合阵 $A(A^2=E)$；幂等阵 $A(A^2=A)$；幂零阵 $A〔A^k$

$=0(k\geqslant 1)]$；幂么阵 $A(A^k=E(k\geqslant 1))$；酉矩阵 $A(A^{-1}=\overline{A}')$；厄米特阵 $A(A=\overline{A}')$等.

有关特殊矩阵的进一步的性质，后面还有论述.

例 28 证明任意方阵 A 均可分解为一个非退化矩阵与一个幂等矩阵之积.

证明 设秩 $A=r$，则存在非退化阵 P,Q 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=C, \quad C^2=C$$

$$A=P^{-1}CQ^{-1}=P^{-1}Q^{-1}QCQ^{-1}=BR$$

其中 $B=P^{-1}Q^{-1}$非退化，$R=QCQ^{-1}$

$\because \quad R^2=QCQ^{-1}QCQ^{-1}=QC^2Q^{-1}=QCQ^{-1}=R$

$\therefore \quad R$ 是幂等阵。

例 29 若 n 阶矩阵 A 满足下列条件中的任何两个，则 A 也满足另一个：①A 是对称矩阵 ②A 是正交矩阵 ③A 是对合矩阵. （证略）

例 30 设 $A=2B-E$，则 A 是对合阵当且仅当 B 是幂等阵.

证明 $\Longrightarrow$ 若 $A^2=E$，即 $(2B-E)^2=4B^2-4B+E=E$ 必有 $4B^2-4B=0$，即 $B^2=B$

$\Longleftarrow$ 若 $B^2=B$，有 $4B^2-4B=0$

$A^2=(2B-E)^2=4B^2-4B+E=E$，即 A 是对合阵.

例 31 证明秩为 r 的矩阵 A 可以分解为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

证明 $\because$ 秩 $A=r$，则存在非奇异阵 P,Q，使

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$$

$$=P\left[\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\cdots\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}\right]Q$$

$$=PE_{11}Q+PE_{22}Q+\cdots+PE_{rr}Q$$

而　秩 $PE_{ii}Q=1$，　$i=1,2,\cdots,r$

例 32　证明秩为 r 的矩阵 A，可以分解为一个秩为 t 的阵与一个秩为 k 的阵之和，这里 $t+k=r$

证明　同上

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\left[\begin{pmatrix}E_t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & E_k & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]Q$$

$$A=P\begin{pmatrix}E_t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q+P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & E_k & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q$$

秩 $P\begin{pmatrix}E_t & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=t$，　秩 $P\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & E_k & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q=k$

例 33　设 A,B 均为正交矩阵，若 $|A|+|B|=0$

求证 $A+B$ 是降秩的.

证明　$A+B=A(A'+B')B$

$|A+B|=|A||A'+B'||B|$

$|A+B|-|A||A'+B'||B|=|A+B|+|A|^2|A'+B'|=|A+B|+|A|^2|A+B|$

$=(1+|A|^2)|A+B|=0$

$1+|A|^2\neq 0$　必有$|A+B|=0$

例 34　R 上矩阵 $A_{s\times n}$，　$B_{s\times m}$

求证：(1)秩 $A'A=$秩 A

(2)存在 R 上 $n\times m$ 矩阵 C，　使 $A'AC=A'B$

证明　(1)设秩 $A=r$,则存在可逆矩阵 P 与 Q

使 $A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$,从而有 $A'=Q'\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P'$

则秩 $A'A=$秩　$Q'\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P'P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$

$=$秩$\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P'P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$秩$\begin{pmatrix}M_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$秩 $M_r=r$

这里 M_r 是正定阵 $P'P$ 的顺序主子式.

(2)设 $A'=(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_s')$

$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$

考虑方程组 $A'AX=A'\beta_j$，　$j=1,2,\cdots,m$

$A'\beta_j$ 是 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots\alpha_s'$ 的线性组合

$A'A$ 的列向量是 A'的列向量的线性组合,故有:

秩 $A'A\leqslant$秩$(A'A,A'\beta_j=$秩 $A'(A,\beta_j))\leqslant$秩 $A'=$秩 $A=$秩 $A'A$

从而　秩 $A'A=$秩$(A'A,A'\beta_j)$

因此,方程组　$A'AX=A'\beta_j$ 有解 C_j

所以，　$C=(C_1,C_2,\cdots,C_m)$为所求.

例 35　若矩阵 A 与对角矩阵 B 相似,求证任给数 λ 和自然数 m，　秩$(\lambda E-A)^m=$秩$(\lambda E-A)$

证明 存在非奇异矩阵 Q,使 $A=Q^{-1}BQ$

有 $(\lambda E-A)^m=(Q^{-1}(\lambda E-B)Q)^m=Q^{-1}(\lambda E-B)^mQ$

秩$(\lambda E-A)^m=$秩$(\lambda E-B)^m=$秩$(\lambda E-B)$

$=$秩$(\lambda E-QAQ^{-1}=$秩 $Q(\lambda E-A)Q^{-1})=$秩$(\lambda E-A)$

练习题

1. 设 b_i; $c_i\in R, i=1,\cdots n$, $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=b_ib_j+c_ic_j$

求证:秩 $A\leqslant 2$

2. 秩 $A<\frac{n}{2}$, 秩 $B<\frac{n}{2}$, 则 $|A^2+AB+B^2|=0$

3. $A;B,C\in P^{n\times n}$, 秩 $A=$秩 BA, 则秩 $AC=$秩 BAC

4. $XAB=XAC$, 秩 $XA=$秩 A, 则 $AB=AC$.

提示:方程组 $XAY=0$ 与 $AY=0$ 同解, $XA(B-C)=0$

故 $A(B-C)=0$

5. 若 $A\sim B$,则 $A^*\sim B^*$

6. 设,$A=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3 & 1\\ 4 & -2 & 6 & 0\\ 2 & 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$

①求 A 的满秩分解

②求 A^-, ③求 A^+

7. 设 A 为 $m\times n$ 阵, 且元素均为 1 的矩阵

求 A 的满秩分解及 A^+

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & 1\\ -1 & -2 & 4\end{pmatrix}$的顺序主子式均非零,

试将 A 分解为单位下三角阵. 对角阵与单位上三角阵之积.

9. 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

10. 证明实二阶正交阵 A 的形式为 $\begin{pmatrix} \cos\theta, & -\sin\theta \\ \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ \sin\theta, & -\cos\theta \end{pmatrix}$

提示:考虑 $|A|$,及 A^* 与 A' 关系.

第五章　二次型

二次型的理论起源于化二次曲面和二次曲线的方程为标准形式的问题，后来，得到了广泛的应用. 例如网络问题中求等效网络、热力学中物体系平衡条件，概率论中“正态分布”，化二次型到主轴上去等等.

一、数域 P 上二次型线性空间与对称矩阵空间同构

二次型的多项式表示与矩阵表示：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(X')$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n=X'AX$$

此处 $A=(a_{ij})$，　$A'=A$　$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$

注意：此处 $A=A'$ 的条件不可少，否则二次型的矩阵表示就不唯一了，例如

$$f(x,y)=x^2+3xy+y^2=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=(x,y)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

映射法则：$f(X')=X'AX\longleftrightarrow A$

是二次型集合到对称阵集合上的一一对应.

这种一一对应保持加法及数乘运算法则不变，因此数域 P 上二次型空间与对称阵空间同构. 这样，关于二次型的问题就可以转化为关于对称矩阵的问题.

二、矩阵的合同关系，二次型的分类

对矩阵 A 的行与列进行同样的初等变换得到的矩阵 B，称为与 A 合同.

(1)A 与 B 合同的充要条件是存在非奇异阵 C，使 $B=C'AC$ （$\because C$ 是若干个初等矩阵之积）

矩阵的合同关系具有反身性、对称性、传递性，因而是一个等价关系(即分类关系). 合同关系可以将对称阵分为若干互不相交的类；同样，二次型亦可化分为若干个互不相交的类

(2)对称阵合同于对角形矩阵，即存在非奇异阵 P，使 $B=P'AP$ 为对角形阵，关于求 P 的方法是对矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 进行合同变换将其化为 $\begin{pmatrix} B \\ P \end{pmatrix}$，($B$ 为对角阵)

(3)合同变换不改变矩阵的对称性、秩、正定性(称为合同的不变量)

(4)两个复对称阵合同的充要条件是它们的秩相同

三、二次型的标准形

1. 二次型 $f(X')=X'AX$，可以经过非退化线性变换化为标准形

此问题相当于对 A 施行合同变换可以化为对角矩阵.化标准形的方法有:

(1)配方法.

(2)初等变换法,即同上 2)中所讲$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} B \\ P \end{pmatrix}$,$B$ 为对角阵,则 $f(X')=X'AX$,经过非退化线性变换 $X=PY$ 即可化为标准形 $g(Y')$. $f(\alpha')=g(\beta')$当且仅当 $\alpha=P\beta$.

(3)用正交变换可以将二次型化为标准形,亦即对称阵正交合同于对角阵,亦即存在正交阵 T,使 $T'AT$ 为对角阵,所施行的正交变换为 $X=TY$.

2. 关于标准形及所经过的非退化线性变换的唯一性问题

(1)一般域 P 上二次形的标准形不是唯一的,但平方项的个数是唯一确定的.

(2)复数域上二次型的标准形,若限制平方项的系数为 1 的话,则是唯一的.

(3)实数域 R 上的二次型可经非退化线性变换化为标准形.

$$f(X')=X'AX=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

秩 $A=r$,$X=PY$,p 为 $f(X')$的正惯性指标,$r-p$ 为负惯性指标.实二次型的秩、正惯性指标、负惯性指标都是唯一确定的.

实 $f(X')$的正惯性指标等于 A 的正特征值的个数.

(4)化标准型所用的非退化线性变换不是唯一的.

因为，若$\begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$

可有$\begin{pmatrix} \alpha_2' \\ \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} A(\alpha_2,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\begin{pmatrix} d_2 & & & & \\ & d_1 & & & \\ & & d_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$

3. 数域 P 上两个未知量个数相同的二次型可以通过非退化线性变换互相转化的充要条件是它们有相同的标准形

四、正定二次型（正定阵）

1. 定义　实数域 R 上的二次型 $f(X')=X'AX$，若对任意 $X'_1=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，　$X'_1\neq 0$，均有

$f(X'_1)>0$（或$\geqslant 0$），则称 $f(X')$ 为正定二次型（或半正定的）

此时，称 A 为正定矩阵（或半正定矩阵）

2. 设 A 为 n 阶实对称阵，则以下诸命题等价

(1)A 是正定矩阵；

(2)A 的顺序主子式大于 0；

(3)A 的所有主子式大于 0；

(4)A 的特征值全大于 0；

(5)A 合同于单位矩阵 E；

(6)A 的正惯性指数为 $p=n$；

(7)存在非退化矩阵 P，使　$A=P'P$；

(8)存在非退化上（下）三角阵 Q，使 $A=Q'Q$；

证明 $A=P'P$, $P=RT$, R 是正交阵, T 是上三角阵,

$A=T'R'RT=T'T$. 反之亦真.

(9) A 的所有 i 阶主子式之和大于 0;

(10) 存在正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 使 $A=\alpha_1\alpha_1'+\alpha_2\alpha_2'+\cdots+\alpha_n\alpha_n'$.

证明 $A=T\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}T'$, $TT'=E$,

$T=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 令, $\alpha_i=\sqrt{\lambda_i}\beta_i$ 即得

类似地, 有关于半正定矩阵的若干等价条件:

(1) A 是半正定矩阵;

(2) A 的所有主子式 $\geqslant 0$;

(3) A 的所有 i 阶主子式之和 $\geqslant 0$;

(4) A 的正惯性指数 $p=r=$ 秩 A(或负惯性指数为 0);

(5) A 合同于 $\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

(6) 存在阵 P, 使 $A=P'P$, 秩 $P=$ 秩 A;

(7) A 的特征值 $\geqslant 0$;

(8) 存在半正定阵 B, 使 $A=B^k$(k 是自然数);

3. 关于正定矩阵的一些重要结论.

(1) 若 A、B 均为正定阵, 则 $a,b>0$, $aA+bB$ 为正定阵.

证法一 $X\neq 0$, $X'(aA+bB)X=aX'AX+bX'BX>0$

$\therefore$ $aA+bB$ 是正定阵.

证法二 $\because A$ 正定, 则存在非退化阵 T_1, 使 $T_1'AT_1=E$, $T_1'BT_1=B_1$ 为正定阵, 则存在正交阵 T_2, 使

$T_2'B_1T_2=D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，　$\lambda_i>0$ 令 $T=T_1T_2$，则有 $T'AT=T'_2T'_1AT_1T_2=E$，　$T'BT=D$

$\therefore$　$T'(aA+bB)T=aT'AT+bT'BT=aE+bD$ 是正定阵.

(2)设 A 是正定阵，$a>0$，则 aA,A^*,A^{-1} 均是正定的.

证明　$A=A'A^{-1}A$，即 A 与 A^{-1} 合同，$A^*=|A|A^{-1}$

(3)设 A 是实对称阵，则存在 $a>0,b>0,c>0$，使 $aE+A,E+bA,cE-A$ 均为正定矩阵

证明　若 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $aE+A$ 的特征值为 $a+\lambda_1,a+\lambda_2,\cdots,a+\lambda_n$，所以存在 a 使 $aE+A$ 的特征值全大于零.

(4)设 A、B 均为正定阵，则乘积 AB 是正定阵的充要条件是　$AB=BA$.

证明　$\Longrightarrow$　显然

$\Longleftarrow$　$\because AB=BA$，$\therefore AB$ 是对称阵.

设 $A=P'P$，　$B=Q'Q$，

$|P|\neq 0$，　$|Q|\neq 0$，　$AB=P'PQ'Q$，

$QABQ^{-1}=QP'PQ'=(PQ')'PQ'=R$

R 是正定阵，AB 与 R 相似，因而有相同的特征值，

$\therefore AB$ 是正定矩阵.

(5)若 A 是正定矩阵，则对于任意正整数 k，A^k 也是正定阵.

(6)设 A 是实对称阵，则 A 是正定阵的充要条件是存在正定阵 B，使 $A=B^k$，k 可为任意确定的正整数.

证明　只须证，存在正交阵 T，使

$$A=T'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}T,\quad \lambda_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$=T'\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_n}\end{pmatrix}TT'\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$$\cdot TT'\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_n}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_n}\end{pmatrix}T$$

则 $B=T'\begin{pmatrix}\sqrt[k]{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[k]{\lambda_n}\end{pmatrix}T$ 为所求.

(7)设 A,B 均为正定矩阵,则 AB 的特征值都大于零.

证明 $A=D^2$,D 正定,$D^{-1}ABD=D^{-1}D^2BD=DBD$,$DBD$ 是正定阵,$AB\sim DBD$

∴ AB 的特征值均大于 0(不一定正定).

(8)设 A,B 均是正定阵,则 $|A|+|B|\leqslant|A+B|$

证明 $\exists\, P,|P|\neq0$,使 $P'AP=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

$P'BP=\text{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$, $\mu_i>0,\lambda_i>0$

取行列式 $|P|^2|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, $|P|^2|B|=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$

$P'(A+B)P=\text{diag}(\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\cdots,\lambda_n+\mu_n)$

两边取行列式:$|P|^2|A+B|=(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)\cdots(\lambda_n+\mu_n)$

$$\geqslant\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n+\mu_1\mu_2\cdots\mu_n$$

$$=|P|^2(|A|+|B|)$$

$\therefore |A+B| \geqslant |A|+|B|$

(9)设 A 是正定阵,则 $0<|A| \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,其中 a_{ii} 为 A 的主对角线上的元素(提示:$A=LL'$,L 是下三角阵,由两端对角线元素之积即得)

(10)证明:正定阵 $A=(a_{ij})$中元素绝对值最大者在对角线上;且 $a_{ij}>0$; $i=1,2,\cdots,n$, $a_{ij}^2 \leqslant a_{ii}a_{jj}$

证明 $a_{ii}>0$;显然(因 $e_i'Ae_i=a_{ii}$)

设$|a_{ij}|$最大,$i \neq j$, $2|a_{ij}|>|a_{ii}|+|a_{jj}|$

取 $X_1=e_i+e_j$ 则 $X_1'AX_1=a_{ii}+a_{jj}+2a_{ij}>0$

取 $X_2=e_i-e_j$ 则 $X_2'AX_2=a_{ii}+a_{jj}-2a_{ij}>0$,矛盾.

再者,R^n 对内积:$(\alpha,\beta)=\alpha' A\beta$ 作成欧氏空间.

由柯西不等式:$|\alpha' A\beta| \leqslant \sqrt{\alpha' A\alpha}\sqrt{\beta' A\beta}$

取 $\alpha=e_i$, $\beta=e_j$ 得

$|a_{ij}| \leqslant \sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}$,故有 $a_{ij}^2 \leqslant a_{ii}a_{jj}$.

五、对称(反对称)矩阵性质的补充

(1)对称阵合同于对角阵;实对称阵正交合同于对角阵.

(2)实对称阵的特征值是实数,且属于不同特征值的特征向量正交.

(3)反对称阵合同于 $\operatorname{diag}\left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}, \cdots, 0,\cdots,0\right)$

(4)A 是实对称阵,则 $A^2=0 \Longleftrightarrow A=0$

证明 $\Longrightarrow$ $AA'=A'A=0$, $\forall X \neq 0$,

$X'AAX=0$,即$(AX)'AX=0$

必有 $AX=0$,即 $A=0$

$\Longleftarrow$ 显然.

(5)A 为实对称阵,则存在常数 c, 使 X,有 $X'AX\leqslant cX'X$

证明 存在 c,使 $cE-A$ 正定,$X'(cE-A)X\geqslant 0$

即 $X'AX\leqslant cX'X$

六、负定、半负定、不定二次型(矩阵)

定义 实二次型 $f(X')=X'AX$, $X'=(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$,

若均有 $f(X')\geqslant 0$,称 $f(X')=X'AX$ 为半正定的.

若均有 $f(X')<0$,称 $f(X')=X'AX$ 为负定的.

若均有 $f(X')\leqslant 0$,称 $f(X')=X'AX$ 为半负定的.

既不是半正定的,又不是半负定的,称 f 为不定的.

命题 $f(X')=X'AX$ 是负定的充要条件是秩 $A=n=$ 负惯性指数. $f(X')=X'AX$ 是半负定的充要条件是秩 $A=$ 负惯性指数.

$f(X')=X'AX$ 是不定的充要条件是秩 $A>$ 负惯性指数 >0.

七、例题

例 1 二次型 $f(X')=X'AX$ 的顺序主子式 D_i(i 阶的)均不为零,则存在非退化线性变换 $X=PY$,使

$$f(X')=D_1y_1^2+\frac{D_2}{D_1}y_2^2+\cdots+\frac{D_n}{D_{n-1}}y_n^2$$

证明 用归纳法.

当 $n=1$ 时,显然成立.

假设命题对 $n-1$ 成立,今对 n 证

令 $$P_1=\begin{pmatrix}1 & & & & b_1\\ & 1 & & & b_2\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & b_{n-1}\\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$, 1 为

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

的非零解.(若是第 n 个分量为 0,即得出 $b_1,\cdots,b_{n-1}$是 $A_{n-1}X=0$ 的非零解,此与 $|A_{n-1}|\neq 0$,矛盾) $f(X')=X'AX$ 经非退化线性变换 $X=P_1\mu$, $|P_1|=1\neq 0$ 有 $f(X')=X'AX=\mu'P_1'AP_1\mu$

$$P'_1AP_1=\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_{1,n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0\\ 0 & \cdots & 0 & d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0\\ 0 & d_n\end{pmatrix}$$

两端取行列式: $|P_1|^2|A|=D_n=D_{n-1}d_n$, $\therefore d_n=\dfrac{D_n}{D_{n-1}}$

$\therefore \quad f(X')=X'AX$

$$=(\mu_1\cdots\mu_{n-1})A_{n-1}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_{n-1}\end{pmatrix}+\frac{D_n}{D_{n-1}}\mu_n^2$$

令 $g(u_1,\cdots,u_{n-1})=(u_1,\cdots,u_{n-1})A_{n-1}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{n-1}\end{pmatrix}$

则由归纳法假定，存在 $\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{n-1}\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}Z_1\\ \vdots\\ Z_{n-1}\end{pmatrix}$， $|Q|\neq 0$

使 $g(u_1,\cdots,u_{n-1})$

$$=(Z_1,\cdots,Z_{n-1})\begin{pmatrix}D_1 & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_1\\ \vdots\\ Z_{n-1}\end{pmatrix}$$

令 $P=P_1\begin{pmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则经过 $X=PY$ 有

$$f(X')=X'AX=Y'P'APY=D_1y_1^2+\frac{D_2}{D_1}y_2^2+\cdots+\frac{D_n}{D_{n-1}}y_n^2$$

此例给出了当顺序主子式不为零时化二次型为标准形的一个公式.

例 2 设 $A=(a_{ij})$， $B=(b_{ij})$，$C=(c_{ij})$， $c_{ij}=a_{ij}b_{ij}$，若 A，B 均为正定阵，则 C 亦正定(许尔定理)

证明 $\because B$ 为正定，则存在 M，$|M|\neq 0$，使 $B=MM'$，

$M=(m_{ij})$

$$\therefore b_{ij}=m_{i1}m_{j1}+m_{i2}m_{j2}+\cdots+m_{in}m_{jn}=\sum_{k=1}^{n}m_{ik}m_{jk}$$

$$X'CX=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(\sum_{k=1}^{n}m_{ik}m_{jk})x_ix_j$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(m_{ik}x_i)(m_{jk}x_j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}y_{ik}y_{jk}\text{（记}\quad m_{ik}x_i=y_{ik}\text{）}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}Y_k'AY_k\text{，这里}\quad Y_k=\begin{pmatrix}y_{1k}\\y_{2k}\\\vdots\\y_{nk}\end{pmatrix}$$

当 $X\neq0$ 时必有某数 $x_l\neq0$，$\because|M|\neq0$，M 的第 l 行元素不全为 0，$\because m_{lk}x_l=y_{lk}$，存在数 k 使 $y_{lk}\neq0$，即存在 $Y_k\neq0$

$$\therefore\quad X'CX=\sum_{k=1}^{n}Y_k'AY_k>0$$

因此，C 是正定阵

推论 若 $(a_{ij})_{n\times n}$ 是正定的，则 $(a_{ij}^k)_{n\times n}$ 是正定的.（用归纳法证）

例 3 设 A,B 为二实对称阵，且 A 正定，则 $A+iB$ 非奇异.

证明 设齐次方程组 $(A+iB)X=0$ 有解

$X=Y+iW,\quad Y,W\in R^n$

则 $(A+iB)(Y+iW)=0$

则 $(AY-BW)+i(AW+BY)=0$

$AY-BW=0$

$AW+BY=0$

$Y'AY-Y'BW=Y'0=0$

$W'AW+W'BY=W'0=0$

两式相加，$\because Y'BW=(Y'BW)'=W'BY$

$\therefore\quad Y'AY+W'AW=0$

又$\because A$ 正定，故必有 $Y=0,\quad W=0$　因而 $X=0$

$\therefore\ |A+iB|\neq 0.$

例 4　设 A 为正定阵，S 为反对称阵，则 $|A+S|>0$

证明　$\because A$ 正定，$\therefore$ 存在 P，$|P|\neq 0$ 使 $P'AP=E$，

又$\because (P'SP)'=P'S'P=-P'SP$

$\therefore\quad P'SP$ 为反对称.

则存在正交阵 Q，使

$$Q'(P'SP)Q=\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & & & & & \\ -\alpha_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & \alpha_t & & \\ & & & -\alpha_t & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}=F$$

$P'SP$ 的特征根为 $a_k i$ 及 0，　$k=1,2,\cdots,t$，

$Q'P'(A+S)PQ=Q'P'APQ+Q'P'SPQ=E+F$

两边取行列式

$$|PQ|^2|A+S|=|P|^2|A+S|$$

$$=(1+|a_1|^2)(1+|a_2|^2)\cdots(1+|a_t|^2)>0$$

$\therefore\quad |A+S|>0$

例 5　证明：满秩实矩阵 A 可表为一个正定阵与一个正交阵之积，且表示法唯一.

证明　$\because A$ 满秩，则 AA' 正定，故存在正定阵 B_1，使 $AA'=B_1^2$，令 $Q_1=B_1^{-1}A$，

$Q_1Q_1'=B^{-1}AA'(B_1^{-1})'=B_1^{-1}B_1^2(B_1^{-1})'=E$

即 Q_1 为正交阵. 同理, $A'A=B_2^2$, B_2 是正定阵,
令 $Q_2=AB_2^{-1}$. $A=Q_2B_2$, Q_2 亦为正交阵.

因此 $A=B_1Q_1=Q_2B_2$.

若还有 $A=B_1Q_1=C_1P_1$, C_1 为正定阵, P_1 为正交阵,
$(B_1Q_1)(B_1Q_1)'=(C_1P_1)(C_1P_1)'$, 有 $B_1^2=C_1^2$,
下面证明 $B_1=C_1$
有 $C_1=T^{-1}\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)T$

可设 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$, T 是正交阵

$B_1=S^{-1}\text{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)S$

可设 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n>0$, S 是正交阵.

$\because B_1^2=C_1^2$,

$T^{-1}\text{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)T=S^{-1}\text{diag}(\mu_1^2,\cdots,\mu_n^2)S$

它们的特征值相同 $\lambda_i^2=\mu_i^2$, $\lambda_i=\mu_i$

$TS^{-1}\text{diag}(\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_n^2)=\text{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)TS^{-1}$

令 $D=TS^{-1}=(d_{ij}), d_{ij}\mu_j^2=\lambda_j^2d_{ij}=d_{ij}\lambda_j^2$
不论 $\lambda_i=\lambda_j$ 或 $\lambda_i\neq\lambda_j$, 均有 $d_{ij}\lambda j=d_{ij}\mu_j=\lambda_jd_{ij}$
即有 $D\,\text{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots\mu_n)=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)D$
因此 $T^{-1}\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)T=S^{-1}\text{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)S$
即 $C_1=B_1$, 另外 $Q_1=B_1^{-1}A=C_1^{-1}A=P_1$
故分解唯一.

例 6 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个实数, 问二次型

$$f(X')=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2$$

何时正定?

解 令 $\begin{cases} x_1+a_1x_2 & =y_1 \\ \quad x_2+a_2x_3 & =y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad x_n+a_nx_1 & =y_n \end{cases}$

即
$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$f(X')=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ 必须所用的线性变换是非退化的.

即
$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & & & \\ & 1 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & & & & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0$$

亦即 $a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，$f(X')$ 为正定的.

例 7 若对称阵 A 是半正定的，则 A^* 是半正定的.

证法一 $\because A$ 半正定， $\therefore$ 秩 $A\leqslant n$ 当 A 为正定时. A^* 亦正定，当秩 $A\leqslant n-1$ 时，即 A 奇异，则秩 $A^*\leqslant 1$，A^* 的特征多项式为

$$|\lambda E-A^*|=\lambda^n-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})\lambda^{n-1}$$
$$=\lambda^{n-1}[\lambda-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})]$$

若 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}=0$，则 A^* 的特征值只有 0.

若 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}\neq 0$，则 A^* 的特征根有一个是 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$，而其余的均为 0.

对称阵 A 的特征值均大于 0 或等于 0，因而是半正定的.

证法二 秩 $A^*=1$ 时，A^* 合同于 $\mathrm{diag}(\pm 1,0,\cdots,0)$，存在 $P=(p_{ij})$ 使

$$A^*=P\begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P'=\pm\left[P\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P'\right]$$

$$=\pm\begin{pmatrix}p_{11}\\p_{21}\\\vdots\\p_{n1}\end{pmatrix}(p_{11},p_{21},\cdots,p_{n1})=\pm\alpha_1\alpha_1'$$

若 $A^*=-\alpha_1\alpha_1'$，则 $A_{ij}<0$（即 A 的 $n-1$ 阶主子式小于 0），这不可能，∴ $A^*=\alpha_1\alpha_1'$

$X'A^*X=X'\alpha_1\alpha_1'X=(X'\alpha_1)(\alpha_1'X)=(\alpha_1'X)'(\alpha_1'X)\geqslant 0$

∴ A 半正定.

例 8 已知非奇异阵 $A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$，其中 A_1 与 A_2 分别为 $p\times n$ 与 $(n-p)\times n$ 矩阵. 求证

(1)二次型 $f(X')=X'(A_1'A_1-A_2'A_2)X$ 的正负惯性指数分别为 p 与 $n-p$

(2)矩阵 $A_1'A_1-A_2'A_2$ 非奇异.

证明 (1)

$$A'\begin{pmatrix}E_p&\\&-E_{n-p}\end{pmatrix}A=(A'_1,A'_2)\begin{pmatrix}E_p&\\&-E_{n-p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$$

$$=A'_1A_1-A'_2A_2$$

即 $A'_1A_1-A'_2A_2$ 与 $\begin{pmatrix}E_p&\\&-E_{n-p}\end{pmatrix}$ 合同，所以其正负惯性指数分别为 p 与 $n-p$

(2)$A'_1A_1-A'_2A_2$ 的秩为 $p+(n-p)=n$，所以非奇异.（亦可用上面矩阵等式两端取行列式来证）

例 9 设 $\alpha'=(a_1,a_2\cdots,a_n)$，$1+c\alpha'\alpha>0$

求证：$B=E+c\alpha\alpha'$ 为正定阵.

证法一 二次型 $X'BX=X'(E+c\alpha\alpha')X=X'X+c(\alpha'X)^2$

当 $c\geqslant 0$ 时，有 $X\neq 0$，有 $X'BX>0$， $\therefore B$ 正定.

当 $c<0, X\neq 0$，有 $X'BX=X'X+c(X'\alpha)^2$

(由柯一布不等式)$\geqslant X'X+c(X'X)(\alpha'\alpha)$

$=X'X(1+c\alpha'\alpha)>0$ 这时 B 亦正定.

证法二 证 B 的任意 k 阶顺序主子式 $|B_k|>0$，

$k=1,\cdots,n$

设 $\alpha'_k=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$， $0\leqslant\alpha_k'\alpha_k\leqslant\alpha'\alpha$，

$|B_k|=|E_k+c\alpha_k\alpha'_k|=|E_k|+c\alpha_k'E^*\alpha_k=1+c\alpha_k'\alpha_k$

(由第二章例 12)

当 $c\geqslant 0$ 时，$|B_k|>0$

当 $c<0$ 时， $|B_k|=1+c\alpha'_k\alpha_k\geqslant 1+c\alpha'\alpha>0$

例 10 设 A,B 为 n 阶实对称阵，A 的特征值均小于 a，B 的特征值均小于 b，则 $A+B$ 的特征值小于 $a+b$.

证明 $aE-A$ 为正定阵， $X\neq 0$

$X'(aE-A)X>0$， 即 $X'AX<aX'X$

同理 $X'BX<bX'X$

设 λ 为 $A+B$ 的任意一个特征值， X 为特征向量.

则 $\lambda X=(A+B)X$

$\lambda X'X=X'AX+X'BX<aX'X+bX'X=(a+b)X'X$

$X'X\neq 0$ 故 $\lambda<a+b$

例 11 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

(1)求方阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为若当标准阵

(2)求正交阵 Q，使 $Q'AQ$ 为对角阵

解 $|\lambda E-A|=\lambda^n-s_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_n$

s_i 为 A 的所有 i 阶主子式之和

有 $s_2=s_3=\cdots=s_n=0$

$|\lambda E-A|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}$

特征值为 n、0；（0 为 $n-1$ 重根）

求得特征向量 $\alpha_1=(1,1,\cdots,1)'$ $\alpha_2=(1,0,\cdots,0,-1)'$，$\alpha_3=(0,1,\cdots,0,-1)',\cdots,$ $\alpha_n=(0,0,\cdots,1,-1)'$

取 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $Q=(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}\cdots,\frac{\alpha_n}{|\alpha_n|})$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}=Q'AQ, \quad Q'Q=E$$

例 12 已知 A 为实反对称阵，则 $E-A^2$ 可逆且正定.

证明 $A'=-A$， $\forall$ $X\neq 0$，

$X'(E-A^2)X=X'(E+A'A)X=X'X+X'A'AX>0$

$(E-A^2)'=E'-A'A'=E-A^2$

故 $E-A^2$ 是正定阵，因而可逆.

例 13 设 A、C 为正定阵，B 是满足方程 $AX+XA^T=C$ 的唯一解，求证 B 是正定阵.

证明 $AB+BA^T=C$， $B^TA+AB^T=C^T=C$

故 $B=B^T$， 即 B 为对称阵.

设 λ_i 为 B 的任一特征值，X 是它的特征向量：$BX=\lambda_i X$

有 $X'CX=X'ABX+X'BA^TX=X'A\lambda_iX+(\lambda_iX)'AX.$

$=2\lambda_iX'AX$

∵ C, A 正定 ∴ $\lambda_i > 0$，因此 B 正定.

例 14 半正定二次型 $f(X') = X'AX$ 的秩 为 r，则 $f(X') = 0$ 的实数解构成 R^n 的一个 $n-r$ 维子空间.

证法一 非奇异阵 P，使

$$P'AP = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = (P^{-1})'\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A = (P^{-1})'\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

设 B 为 P^{-1}的前 r 行作成的阵， 则

$BX = 0$ 的解空间，即为 $f(X') = 0$ 的解.

证法二 $A = C'C$ 秩 $A =$ 秩 C， $X'AX = X'C'CX = (CX)'(CX) = 0$ 的充要条件是 $CX = 0$. 而 $CX = 0$ 的解空间是 $n-r$ 维的.

例 15 设实二次型 $f(x_1, \cdots, x_n) = X'AX$ 的正负惯性指数分别为 p 及 q，则 R^n 可表成两两正交的子空间 V_1, V_2, V_3 的直和：$R^n = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$，其中 V_1, V_2, V_3 的维数分别为 $p, q, n-p-q$，且对于 V_1 中的非零向量 α，都有 $f(\alpha) > 0$；对于 V_2 中的非零向量 α，都有 $f(\alpha) < 0$，而对于 V_3 中的向量 α，都有 $f(\alpha) = 0$

证明 存在非退化线性变换 $X = CY$， C 为正交阵. 可将二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$化为规范型：

$$f(X') = X'AX = d_1 y_1^2 + \cdots + d_p y_p{}^2 - d_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots$$
$$- d_{p+q} y_{p+q}^2, d_i > 0$$

设 C^{-1}的行向量为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

齐次方程组 $\begin{pmatrix}\beta_{p+1}\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (1)

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_p\\ \beta_{p+q+1}\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_p\\ \beta_{p+1}\\ \vdots\\ \beta_{p+q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \tag{3}$$

的基础解系分别为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$； $\gamma_1,\cdots,\gamma_q$ 及 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-p-q}$

则 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$； $V_2=L(\gamma_1,\cdots,\gamma_q)$
及 $V_3=L(\eta_1,\cdots,\eta_{n-p-q})$为所求.

事实上，$\forall\ \alpha\in V_1$， $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_p\alpha_p$

$$C^{-1}\alpha=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad f(\alpha)=d_1a_1^2+\cdots+d_pa_p^2\geqslant 0$$

当 $\alpha\neq 0$ 时， $k_1,\cdots,k_p$ 不全为零.

就有 $a_1,\cdots,a_p$ 不全为零，否则有 α 是齐次方程组 $C^{-1}X=0$ 的非零解，这与 C^{-1} 非退化矛盾，故这时 $f(\alpha)>0$. 同理，对于 V_2 中的非零向量 α 均有 $f(\alpha)<0$

对于 V_3 中的向量 α 均有 $f(\alpha)=0$

$$
\text{又}\quad C^{-1}\alpha_i=\begin{pmatrix} t_1\\ \vdots\\ t_p\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\xi_i,\qquad C^{-1}\gamma_j=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ t_{p+1}\\ \vdots\\ t_{p+q}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\mu_j
$$

则内积 $(\alpha_i,\gamma_j)=\alpha_i{}'\gamma_j=\xi_iC'C\mu_j=\xi_i{}'E\mu_j=0$，因此，$V_1$ 与 V_2 正交，同理 $V_1\perp V_3$， $V_2\perp V_3$，正交子空间的和是直和，因而

$$V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$$

事实上，$\forall\ \alpha\in V$，α 可由基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\gamma_1,\cdots,\gamma_q,\eta_1,\cdots,\eta_{n-p-q}$ 线性表示. $\alpha=(k_1\alpha_1+\cdots+k_p\alpha_p)+(t_1\gamma_1+\cdots+t_q\gamma_q)$

$$+(s_1\eta_1+\cdots+s_{n-p-q}\eta_{n-p-q})=\omega_1+\omega_2+\omega_3$$

$$\omega_1\in V_1,\quad \omega_2\in V_2,\quad \omega_3\in V_3$$

另一方法：令 α_i 为方程组 $C^{-1}X=e_i$ 的解（e_i 是 E 的第 i 列）

则 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$， $V_2=L(\alpha_{p+1},\cdots,\alpha_{p+q})$ $V_3=L(\alpha_{p+q+1},\cdots,\alpha_n)$

有 $V=V_1\oplus V_2\oplus V_3$

例 16 A 对称，B 正定，则存在非退化阵 P，使 $P'AP$ 与 $P'BP$ 同时为对角阵，且当 $P'AP$ 的特征根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 时，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $|\lambda B-A|$ 的根.

证明 存在 P_1，使 $P'_1BP_1=E$， $|P_1|\neq 0$

$\because$ P'_1AP_1 对称，存在正交阵 P_2， 使

$$P'_2P'_1AP_1P_2=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $P=P_1P_2$， $P'(\lambda B-A)P=\lambda E-P'AP$

两端取行列式即得.

注： $$P'(\lambda B-A)P=\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & & & \\ & \lambda-\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda-\lambda_n\end{pmatrix}$$

即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $|\lambda B-A|$ 的根.

令 $\lambda=\lambda_i$， 有

$$P'(\lambda_iB-A)P=\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda-\lambda_{i-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \lambda-\lambda_{i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda-\lambda_n\end{pmatrix}$$

再令 $P=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$

上式两端的第 i 列相等：

$P'(\lambda_iB-A)\eta_i=0$， $(\lambda_iB-A)\eta_i=0$， 即 η_i 是齐次线性方程组 $(\lambda_iB-A)X=0$ 的解.

这样求出的 P 还应满足 $P'BP=E$

下面通过例子说明求 P 的方法步骤：

例 17 设对称阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -15 & 3\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix},$$

正定阵

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 17 & -7\\ -1 & -7 & 3\end{pmatrix}$$

试求非奇异阵 P,使 $P'BP=E$,

$$P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

解 (1)求$|\lambda B-A|$的根:$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$

(2)解齐次方程组.

$(\lambda_1 B-A)\eta_1=0$ 得 $\eta'_1=(a,0,0)$, a 为任意数.

$(\lambda_2 B-A)\eta_2=0$ 得 $\eta'_2=(b,b,3b)$, b 为任意数.

$(\lambda_3 B-A)\eta_3=0$ 得 $\eta'_3=(0,c,2c)$, c 为任意数.

(3)得到:$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

(4)要求满足 $P'BP=E$,从而确定:a,b,c

$$P'BP=\begin{pmatrix}a^2 & & \\ & b^2 & \\ & & c^2\end{pmatrix}=E,\quad a=1,\quad b=-1,\quad c=1$$

(5)因此:

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

例 18 若 A,B 均正定,则$|\lambda A-B|$的根均为正数

提示用上题: $P'BP$ 的特征根即为$|\lambda A-B|$的根.

例 19 若 A,B 为正定阵，且 $|\lambda A-B|$ 的根全是 1.

求证：$A=B$

证法一 $P'_1AP_1=E=P'_2P'_1BP_1P_2$， P_2 为正交阵，

$P'_1BP=E$， $P'_1AP_1=P'_1BP_1$， 故 $A=B$

证法二 $A=C'C$， $B_1=(C^{-1})'BC^{-1}$ 为正定阵.

有 $B_1=Q'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Q$， Q 正交

$\because$ $|\lambda A-B|=|\lambda C'C-C'B_1C|=|C'||\lambda E-B_1||C|$

$\therefore$ B_1 的特征根全是 1，即 $\lambda_i=1$，

$\therefore$ $B_1=Q'Q=E$，

故 $B=C'B_1C=C'C=A$

例 20 A 为正定阵的充要条件是存在 n 个线性无关的向量 $\alpha'_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$，使 $A=\alpha_1\alpha'_1+\alpha_2\alpha'_2+\cdots+\alpha_n\alpha'_n$

证明 A 正定 $\Longleftrightarrow$ 存在 P， $|P|\neq 0$， 使 $A=PP'$

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

$$A=PP'=\alpha_1\alpha'_1+\alpha_2\alpha'_2+\cdots+\alpha_n\alpha_n'$$

推论 1 A 正定 $\Longleftrightarrow$ 存在 R^n 的标准正交基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 使 $A=\lambda_1\alpha_1\alpha'_1+\lambda_2\alpha_2\alpha'_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n'$

($\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征根)

提示

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P', \quad P \text{ 为正交阵}$$

$$\lambda_1PE_{11}P'+\lambda_2PE_{22}P'+\cdots+\lambda_nPE_{nn}P'$$

$$=\lambda_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)e_1e_1'\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \vdots\\ \alpha'_n\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_n(\alpha_1\cdots\alpha_n)e_ne_n'\begin{pmatrix}a_1'\\ \vdots\\ a_n'\end{pmatrix}$$

$=\lambda_1\alpha_1\alpha'_1+\lambda_2\alpha_2\alpha'_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha'_n$，这里 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

推论 2　A 正定 $\Longleftrightarrow A$ 是 n 个秩为 1 的矩阵 A_i 的线性组合，其系数为 A 的特征根. $A_i^2=A_i$，　$A_iA_j=0\quad(i\neq j)$

提示：上面的推论中，令 $A_i=\alpha_i\alpha_i'$，　则秩 $A_i=1$，

$A_i^2=\alpha_i\alpha_i'\alpha_i\alpha_i'=\alpha_i\alpha_i'$，　$A_iA_j=\alpha_i\alpha_i'\alpha_j\alpha_j'=0$

推论 3　对称阵 A 能表成秩为 1 的 r 个阵 A_i 的线性组合. 其组合系数为 A 的特征值. 这里秩 $A=r$，　且 $A_i^2=A_i$，$A_iA_j=0$

提示：存在正交阵 P，使

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}P'$$

$=\lambda_1PE_{11}P'+\lambda_2PE_{22}P'+\cdots+\lambda_rPE_{rr}P'$

$=\lambda_1A_1+\cdots+\lambda_rA_r$，　$A_i=PE_{ii}P'$

练习题

1. $=(a_{ij}),\alpha=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$b_i\neq0$，$C_{ij}=a_{ij}b_ib_j$，若 A 正定（或半，或负），则 $C=(C_{ij})$ 正定（或半，或负）.

2. 设矩阵 A,B 均非奇异，且 $A'A=B'B$，则存在正交阵 P，使 $PB=A$.

（提示：$A'A,B'B$ 正定，非退化阵 Q 使

$Q'A'AQ=Q'B'BQ=E$，　AQ 与 BQ 为正交阵，

$(AQ)(BQ)^{-1}=P$ 正交）

3. A 为半正定阵，则 $|A+E|\geqslant1$，等号成立 $\Longleftrightarrow A=0$

（提示：$P'AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，　$\lambda_i\geqslant0$，　P 正交.

考虑　$|P^{-1}(A+E)P|$）

4. 若$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$是正定对称阵，则 $D-B'A^{-1}B$ 亦是正定阵且$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & D \end{vmatrix} \leqslant |A| \cdot |D|$

证明 A 是顺序主子阵，因而是正定的. A^{-1}亦是正定的，

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ -B'A^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B'A^{-1}B \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & D \end{pmatrix}$合同于$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-B'AB \end{pmatrix}$

所以 $D-B'AB$ 是正定阵. 上面等式两端取行列式：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & D \end{vmatrix} = |A|\,|D-B'A^{-1}B|$$

$\because$ A^{-1}正定， $\therefore$ $A^{-1}=P'P$ 则

$B'A^{-1}B=B'P'PB=(PB)'(PB)$为半正定阵，

故$|D|=|(D-B'A^{-1}B)+B'A^{-1}B| \geqslant |D-B'A^{-1}B|$(由事实⑧)

从而得证.

5. A 为 n 阶正定阵，B 为 n 阶半正定阵，则

$|A+B| \geqslant |A|$，等号成立$\Longleftrightarrow B=0$

证明 $\exists$，非奇异 P， 使 $P'AP=E$，

$P'BP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=D$，

$$|A+B|=|(P^{-1})'(E+D)P^{-1}|=|P^{-1}|^2|E+D|$$
$$\geqslant |P^{-1}|^2|E|=|(P^{-1})'EP^{-1}|=|A|$$

等号成立$\Longleftrightarrow D=0. \Longleftrightarrow B=0$

6. A 为正定阵，B 为对称阵，则秩 $B=$ 秩 $B'AB$.

证明 $A=C^2$， C 为正定阵，

$B'AB=B'C^2B=(CB)'(CB)$

即，$B'AB$ 为半正定阵，故秩 $B'AB=$ 秩 $CB=$ 秩 B.

7. A 为 n 阶实对称阵，则秩 $A=n\Longleftrightarrow\exists$ ，实阵 B，使 $A'B+B'A$ 是正定阵.

(提示：$\Longrightarrow$ 取 $B=(A^{-1})'$ 即得

$\Longleftarrow\forall\ X\neq 0$， $X'(A'B+B'A)X>0$

$(AX)'(BX)+(BX)'AX>0$， $AX\neq 0$， A 满秩)

8. A 为实对称阵，求证，$\forall\ X\in R^n$， 均有 $X'AX=0$ $\Longleftrightarrow A=0$，从而证明二次型矩阵表达式中 A 的唯一性.

提示：$\forall\ X$，均有 $X'AX=0$ $\Longleftrightarrow A$ 反对称

又 $X'AX=X'BX$， $X'(A-B)X=0$， X 均成立，

$\therefore A-B=0$， $A=B$

9. 证明实对称阵可以分解为一个半正定阵与一个半负定阵之和.

10. 证明顺序主子式皆不为零的实矩阵可以分解为一个正定阵与一个上三角阵之积.

11. 设 A 为半正定阵，则 $|A+E|\geq 1$.

12. 设 $X'=(x_1,\cdots,x_n)$， $Y'=(y_1,\cdots,y_n)$， $(X,Y)=0$ 则 $A=(x_iy_j)$ 的特征值为零.

13. 设 $A=(a_{ij})$， $a_{ij}=\begin{cases}a_i^2+1 & (i=j)\\ a_ia_j & (i\neq j)\end{cases}$

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非零实数，求证 A 是正定阵.

提示：$\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $A=\alpha\alpha'+\mathrm{E}$

第六章　线性空间

线性空间是最基本的数学概念之一，它用公理化方法引进了一个代数系．线性空间的应用是很广泛的．

一、线性空间的定义

线性空间是由两个非空集合（V，数域 P），两种结合法则（一个是 V 的加法＋，另一个是数乘，即 $P\times V$ 到 V 的映射）联为一体而成的一个抽象代数系（$V,P,+,\cdot$）对于加法作成加群，对于数乘满足结合律，两个分配律、P 的单位元仍是数乘的单位元．

例 1　实数域 R 上，全体正实数 R^+，规定 R^+ 的加法为普通的实数乘法，即 $a\oplus b=ab$，数乘法则为 $k\odot a=a^k$，则 R^+ 对规定的加法及数乘作成 R 上的线性空间．

证明　（略）在验证公理 7）

$(k+1)\odot a=k\cdot a+l\cdot a$ 时，应注意等号两端"＋"号的意义不同，左端是 P 中数的加号，而右端是 V 中向量的加号．

二、基底、维数、坐标

数域 P 上 n 元向量空间 P^n 中有关向量的线性相关性及其规律对于一般 P 上线性空间 V 中的向量亦成立．基底维数坐标的概念是为了研究线性空间中向量间的关系，以利掌握线性空间的本质和构造．

线性空间 V 的基底：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 就是 V 的全体向量的极

大无关部分组.基底中的向量是有序的.若是调换基底中向量的次序,所得到的就是 V 的另一个基底了.

线性空间 V 中任意向量 β 均可由基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示,且表示系数是唯一确定的.称为向量 β 的坐标, 记为 $[\beta]$.

设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_n\end{pmatrix},\quad [\beta]=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

基底 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中向量可由基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$ 线性表示

$$\beta_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix},\quad i=1,2,\cdots,n$$

记 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A,\quad A=(a_{ij})$

称 A 为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.过渡矩阵是可逆的,由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的过渡阵为 A^{-1},$\forall\ \varepsilon\in V$

$$\varepsilon=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \varepsilon=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

则有 $\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

A 是基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡阵.

由验证可知:$[(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)A]B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(AB)$

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A+(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(A+B)$

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A+(\beta_1,\cdots,\beta_n)A=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2\cdots,\alpha_n+\beta_n)A$

这里，$\alpha_1\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1\cdots,\beta_n$ 是两组基底，A,B 是 n 阶方阵.

引入坐标概念，沟通了数域 P 上 n 维线性空间与线性空间 P^n 的关系，我们知道它们是同构的. 这样研究 V 中有关运算性质的问题可以转化为 P^n 中有关运算性质的问题.

例 2 求例 1 中向量空间 R^+ 的基底，维数，零向量及 R^+ 中任一元 a 的负元.

解 $a\in R^+$，有 $1+a=a+1=1\cdot a=a$，即 1 为零元. 又

$a\in R$，$a\neq1$，若有 $ka=1$，$a^k=1$，必 $k=0$

即 a 线性无关. $b\in R^+$，$b=a^{log}a^b=log_ab\cdot a$

即 b 可由 a 线性表示，所以 a 为 R^+ 的基. b 在基 a 下的坐标为 log_ab.

a 的负元是 $\frac{1}{a}$，$(\because a\oplus\frac{1}{a}=a\cdot\frac{1}{a}=1)$

例 3 求实数域 R 上全体 n 阶复方阵 $C^{n\times n}$ 对于矩阵的加法及数乘所作成线性空间的基及维数.

解 设 E_{ij} 是第 i 行第 j 列元素为 1，其余元素为 0 的 n 阶方阵，则 E_{ij}，$iE_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n$，E_{ij}左边的 $i=\sqrt{-1})$ 为 $C^{n\times n}$ 的基底，$C^{n\times n}$ 的维数是 $2\cdot n^2$.

三、子空间、子空间的和与交

1. 子空间的判别法

线性空间 V 的一个非空子集 W 作成 V 的子空间

$\Longleftrightarrow\forall\ \alpha,\beta\in W$，有 $\alpha+\beta\in W$，$k\alpha\in W,k\in P$

$\Longleftrightarrow\forall\ \alpha,\beta\in W,k,L\in P$，有 $k\alpha+L\beta\in W$.

2. 子空间的一般表示法——生成子空间表示法

由线性空间 V 中向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 生成的子空间，记为

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\{$一切 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m, k_i\in P\}$

生成元可以线性无关，亦可以线性相关，若是 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{ir}$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关部分组，则

$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=L(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})$　其维数是 r.

$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Longleftrightarrow$ 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价.

例 4　设 M 是数域 P 上形如

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$的循环矩阵的集合

则 M 是线性空间 $P^{n\times n}$ 的子空间，并求其基底和维数.

解　令

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} O & E_{n-1} \\ E_1 & O \end{pmatrix}$$

有 $D^k=\begin{pmatrix} O & E_{n-k} \\ E_k & O \end{pmatrix}$，　这里 E_k 为 k 阶单位方阵，

则 $D,D^2,\cdots,D^{n-1},D^n=E$，在 P 上线性无关.

且 $A=a_1E+a_2D+a_3D^2+\cdots+a_{n-1}D^{n-2}+a_nD^{n-1}$

若令 $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_nx^{n-1}$

有 $A=f(D)$

对于任意的 $B\in M$，必存在 P 上 $n-1$ 次多项式 $g(x)$

使 $B=g(D)$， 反之，亦真.

这样，易证 $A+B=f(D)+g(D)\in M$

$kA=kf(D)\in M$

因此，M 是子空间.

基底是 $E,D,D^2,\cdots,D^{n-1}$. 维数是 n.

对于自然数 s，有 $s=nq+r,r=0$ 或 $r<n$

则 $D^s=D^{nq+r}=D^r$.

易证：$AB=f(D)g(D)\in M$，

且 $AB=f(D)g(D)=g(D)f(D)=BA$

因此，M 可作成有单位元的可换环.

例 5 设 $V_1,V_2,\cdots,V_r$ 为有限维线性空间 V 的 r 个真子空间，证明 V 中至少有一个向量 ξ， $\xi\overline{\in}V_i$ $(i=1,\cdots,r)$

证明 对 r 作归纳法

当 $r=2$ 时， V_1,V_2 为真子空间，V 中有不属于 V_1(或 V_2)的元. 若 $\alpha\overline{\in}V_1,\alpha\overline{\in}V_2$ 即得证.

若 $\alpha\overline{\in}V_1$， $\alpha\in V_2$，存在 $\beta\overline{\in}V_2$，若还有 $\beta\overline{\in}V_1$，得证，若

$\beta\in V_1$，则 $\alpha+\beta\overline{\in}V_1,\alpha+\beta\overline{\in}V_2$ 否则 若 $\alpha+\beta\in V_1$，必有 $\alpha\in V_1$ 矛盾. 若 $\alpha+\beta\in V_2$，有 $\beta\in V_2$，矛盾.

假设命题对 $r-1$ 成立，现对 r 证，即 $V_1,V_2,\cdots,V_r$ 为真子空间.

由归纳假定， $\alpha\overline{\in}V_i$ $(i=1,\cdots,\cdots,r-1)$若 $\alpha\overline{\in}V_r$，则命题得证. 若 $\alpha\in V_r$，则存在 $\beta\overline{\in}V_r$，对于每个 $V_i(i=1,2,\cdots,r-1)$至多有一个 $k_i\in P$，使 $\beta+k_i\alpha\in V_i$ $(i=1,2,\cdots,r-1)$，否则，若有 $\beta+k_i\alpha\in V_i$， $\beta+k_i'\alpha\in V_i$， $i=1,2,\cdots,r-1$ 有 $(k_i-k_i')\alpha\in V_i$， $k_i\neq k_i'$时必有 $\alpha\in V_i$，矛盾

这样 P 中数有无穷多，取 $S=k_i$，则 $\beta+S\alpha\overline{\in}V_i$

$(i=1,2,\cdots,r)$

此例说明，线性空间 V 不能简单地被有限个真子空间所覆盖.

例 6 求证在有限维线性空间 V 的真子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_r$ 之外，存在 V 的基底.

证明 设维数 $V=n$，由例 5， $\varepsilon_1 \overline{\in} V_i \quad (i=1,2,\cdots,r)$. 令 $L(\varepsilon_1)=W_1$，同样，$\varepsilon_2 \overline{\in} V_i$， $\varepsilon_2 \overline{\in} W_1$， $\varepsilon_1 \neq 0$， $\varepsilon_2 \neq 0$， $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 线性无关. 否则，ε_2 可由 ε_1 线性表示，$\varepsilon_2 \in W_1$，矛盾. 令

$L(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=W_2$，存在 $\varepsilon_3 \overline{\in} V_i$， $\varepsilon_3 \overline{\in} W_1$， $\varepsilon_3 \overline{\in} W_2$， $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性无关. 如此继续下去，可得 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，是 V 的一组基.

3. 子空间的运算——和与交

设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间

$V_1+V_2=\{\beta=\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2\}$

$V_1 \cap V_2=\{\beta \mid \beta \in V_1 \quad \text{又 } \beta \in V_2\}$

和与交是子空间，其维数关系为

$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1 \cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$

例 7，线性空间 V 的子空间 V_1 与 V_2 的并集 $V_1 \cup V_2$ 是子空间的充要条件是 $V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$

证明 $\Longleftarrow$ 显然.

现证 $\Longrightarrow$ $V_1 \cup V_2$ 是子空间，若是 V_1 与 V_2 不能互相包含，则 $\alpha \in V_1$， $\alpha \overline{\in} V_2$， $\beta \in V_2$， $\beta \overline{\in} V_1$，

$\alpha \in V_1 \cup V_2$， $\beta \in V_1 \cup V_2$， $\alpha+\beta \in V_1 \cup V_2$

必有 $\alpha+\beta \in V_1$ 或 $\alpha+\beta \in V_2$，若 $\alpha+\beta \in V_1$，

则 $\alpha+\beta-\alpha \in V_1$， 矛盾.

例 8 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 与 $L(\beta_1,\cdots,\beta_s)$ 的并集是线性空间 V

的子空间的充要条件是两组生成元中一组可由另一组线性表示.

例 9 数域 P 上线性空间 P^n 的任一子空间 V_1 至少是一个 P 上 n 元线性方程组的解空间.

证明 设 V_1 的最小生成元组为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$,

$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)=V_1$,维数 $V_1=r$

齐次方程组 $\begin{pmatrix}\alpha'_1\\ \alpha'_2\\ \vdots\\ \alpha'_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 的基础解系为

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r}$,则

$\begin{pmatrix}\beta'_1\\ \vdots\\ \beta'_{n-r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 的解空间即为 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$.

例 10 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_t\end{pmatrix}$, 则 $AX=0$ 的解空间

W 是 $A_iX=0$ 的解空间 V_i 之交,$i=1,2,\cdots,t$(证略)

例 11 设 A 为 n 阶实矩阵,R^n 为实数域上 n 元向量空间,$W=\{Y\in R^n\,|\,X'AY=0,\quad \forall\ X\in R^n\}$

则 W 为 R^n 的子空间,且维(W)+秩 $A=n$.

证明 令 $W_1=\{Y\,|\,AY=0,Y\in R^n\}$

则 W_1 为 $AY=0$ 的解空间

维 $W_1=n-$秩 A, 下证 $W_1=W$

$\forall Y \in W$，　$X'AY=0$ 对一切 X 都成立.

取 $X=AY$ 时，有 $(AY)'AY=0$.

必有，$AY=0$，　即 $Y \in W_1$.

反之，显然，$W_1 \subseteq W$，　所以 $W_1=W$

例 12　$R(A)$表示矩阵 A 的列向量生成的子空间，证明：

$R(A) \subseteq R(B) \Longleftrightarrow$ 存在矩阵 C，使 $A=BC$.

证明　$R(A) \subseteq R(B)$说明 A 的列向量属于 $R(B)$

即　A 的列向量 α_i 是 B 的列向量 β_i 的线性组合

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\beta_j$$

令 $C=(c_{ji})$，　则有 $BC=A$

例 13　线性方程组 $AX=0$ 的解全是 $\beta^T X=0$ 的解 $\Longleftrightarrow \beta^T$ 可由 A 的行向量线性表示.

证明　$AX=0$ 的解全是 $\beta^T X=0$ 的解

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ \beta^T \end{pmatrix} X=0 \text{ 与 } AX=0 \text{ 同解}$$

$$\Longrightarrow \text{秩}\begin{pmatrix} A \\ \beta^T \end{pmatrix} = \text{秩 } A$$

则 β^T 可由 A 的行向量 γ_i^T 线性表示.

反之，　$$\beta^T = (c_1, \cdots, c_n)\begin{pmatrix} \gamma_1^T \\ \gamma_2^T \\ \vdots \\ \gamma_n^T \end{pmatrix}$$

当有 X_0 使 $AX_0=0$，

有 $$\beta^T_{X_0} = (c_1, \cdots, c_n)\begin{pmatrix} \gamma_1^T \\ \vdots \\ \gamma_n^T \end{pmatrix} X_0 = 0$$

例 14 令 $N(A^T)=\{\alpha \mid A^T\alpha=0,\quad \alpha$ 为 n 元向量$\}$

求证：$N(A^T)\supseteq N(B^T)\Longleftrightarrow$ 存在矩阵 C 使 $A=BC$

证明 $N(A^T)\supseteq N(B^T)$

$\Longleftrightarrow$ 由 $B^TX=0$ 可推出 $A^TX=0$

$\Longleftrightarrow$ 由 $B^TX=0$ 可推出 $\alpha_i^TX=0$

α_i^T 为 A^T 的行向量，$i=1,2,\cdots,n$

$\Longleftrightarrow \alpha_i^T$ 可由 B^T 的行向量线性表示

$\Longleftrightarrow \alpha_i^T$ 可由 B 的列向量线性表示（α_i 即是 A 的第 i 列）

$\Longleftrightarrow$ 存在矩阵 C，使 $BC=A$.

例 15 $R(A)\subseteq R(B)\Longleftrightarrow N(A^T)\supseteq N(B^T)$

证明 $R(A)\subseteq R(B)\Longleftrightarrow$ 存在阵 C 使 $BC=A\Longleftrightarrow N(A^T)\supseteq N(B^T)$.

例 16 设 $N(A)\subseteq N(B)$，求证存在阵 M，使 $MA=B$

证明 $N(A)\subseteq N(B)\Longleftrightarrow R(A^T)\supseteq R(B^T)$

$\Longleftrightarrow$ 存在阵 C，使 $A^TC=B^T$

即 $C^TA=B$，取 $M=C^T$ 即可.

例 17 设 α 属于数域 R 上空间 R^n，A 与 B 是 R 上的矩阵. $W=\{B\alpha \mid AB\alpha=0\}$，则 $\dim W=$ 秩 $B-$ 秩 AB

证明 设秩 $B=r$，则 $BX=0$ 的解空间 V_1 是 $n-r$ 维的

秩$(AB)=s$，则 $ABX=0$ 的解空间 V_2 的维数是 $n-s$，

$\because\ V_1\subseteq V_2,\quad \therefore\ n-r\leqslant n-s$

取 V_1 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 扩充成 V_2 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\alpha_{n-r+1},\cdots,\alpha_{n-s}$，则 $B\alpha_1,\cdots,B\alpha_{n-r},B\alpha_{n-r+1},\cdots,B\alpha_{n-s}$ 属于 W，且生成 W.

$W=L(B\alpha_1,\cdots,B\alpha_{n-r},B\alpha_{n-r+1},\cdots,B\alpha_{n-s})$

$=L(B\alpha_{n-r+1},\cdots,B\alpha_{n-s})$

下面证明 $B\alpha_{n-r+1},\cdots,B\alpha_{n-s}$线性无关：

若 $\sum\limits_{j=n-r+1}^{n-s} k_jB\alpha_j=0$， 即 $\sum\limits_{j=n-r+1}^{n-s} B(k_j\alpha_j)=0$

则有 $\sum\limits_{j=n-r+1}^{n-s} k_j\alpha_j\in V_1$，可由 V_1 的基底线性表示

$\sum\limits_{j=n-r+1}^{n-s} k_j\alpha_j=\sum\limits_{i=1}^{n-r} k_i\alpha_i$， $\because$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\cdots,\alpha_{n-s}$线性无关，

$\therefore k_i=0$， $i=1,2,\cdots,n-r,\cdots,n-s$

因此 $B\alpha_{n-r+1},\cdots,B\alpha_{n-s}$线性无关

故 $\dim W=(n-s)-(n-r)=r-s=$秩 $B-$秩 AB.

例 18 证明 秩 $AB+$秩 $BC\leqslant$秩 $B+$秩 ABC.

证明 令 $W_1=\{BC\alpha\mid ABC\alpha=0\}$，$W_2=\{B\alpha\mid AB\alpha=0\}$，$\forall\ BC\alpha_1\in W_1$，有 $ABC\alpha_1=AB(C\alpha_1)=0$， 有 $B(C\alpha_1)\in W_2$

即 $W_1\subseteq W_2$， $\dim W_1\leqslant\dim W_2$.

由上例可得 $\dim W_1=$秩 $BC-$秩 ABC，

$\dim W_2=$秩 $B-$秩 AB

$\therefore$ 秩 $BC-$秩 $ABC\leqslant$秩 $B-$秩 AB

$\therefore$ 秩 $AB+$秩 $BC\leqslant$秩 $B+$秩 ABC.

特别地，当 $A=B=C$ 时，有 2 秩 $A^2\leqslant$秩 $A+$秩 A^3.

例 19 设 V_1,V_2 为线性空间 V(有限维)的两个子空间，且 $\dim(V_1+V_2)-\dim(V_1\cap V_2)=1$，则和空间 V_1+V_2 与其中之一重合，交空间与另一空间重合.

证明 $\because\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$

$=\dim V_1+\dim V_2$ $\qquad(I)$

$V_1\subseteq V_1+V_2$， $V_1\cap V_2\subseteq V_2$

$\dim(V_1+V_2)\geqslant\dim V_1$

①若 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1$，则 $V_1+V_2=V_1$，有 $\dim V_2=\dim(V_1\cap V_2)$，从而 $V_2=V_1\cap V_2$；

②若 $\dim(V_1+V_2)>\dim V_1$，则 $\dim(V_1+V_2)\geqslant\dim V_1+1$，

由假设，$\dim(V_1\cap V_2)+1\geqslant\dim V_1+1$

故有 $\dim(V_1\cap V_2)\geqslant\dim V_1$，但 $V_1\supseteq(V_1\cap V_2)$，

$\dim V_1\geqslant\dim(V_1\cap V_2)$，因而 $\dim V_1=\dim(V_1\cap V_2)$，$V_1=(V_1\cap V_2)$，又由($I$)知 $\dim V_2=\dim(V_1+V_2)$

又 $V_2\subseteq V_1+V_2$，故 $V_2=V_1+V_2$.

4. 求和空间与交空间的方法

命题 1 线性空间 V 的子空间 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$ 与 $V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 之和 $V_1+V_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

命题 2 设 P^n 的两个子空间 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，

$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 为 P^n 中两组线性无关的向量组. 则 $\dim(V_1\cap V_2)$ 等于齐次方程组

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_s\\ y_1\\ \vdots\\ y_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \tag{1}$$

的解空间的维数

证明 $\because\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1+V_2)$ $=s+t-$秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 此即齐次方程组(1)基础解系中所含向量的个数，即是其解空间的维数.

命题 3 如命题 2，设 $\eta_i=(x_{i1},\cdots,x_{is},y_{i1},\cdots,y_{it})'$
$=(X_i,Y_i)'$ $(i=1,\cdots,m)$为方程组(1)的基础解系

令 $\gamma_i=x_{i1}\alpha_1+x_{i2}\alpha_2+\cdots+x_{is}\alpha_s$
$=-(y_{i1}\beta_1+y_{i2}\beta_2+\cdots+y_{it}\beta_t)$

则 $L(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\cap L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

证明 首先 $\gamma_i\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\cap L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

其次，$\forall\ \gamma\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\cap L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 有，

$\gamma=c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s=d_1\beta_1+\cdots+d_t\beta_t$

$c_1\alpha_1+\cdots+c_s\alpha_s-d_1\beta_1-\cdots-d_t\beta_t=0$

即 $\xi=(c_1,\cdots,c_s,-d_1,\cdots,-d_t)'$ 为齐次方程解(1)的解.

因此可由基础解系线性表示：$\xi=k_1\eta_1+\cdots+k_m\eta_m$

即有 $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_s\end{pmatrix}=(X_1,X_2,\cdots,X_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}$

因此， $\gamma=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_s\end{pmatrix}$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)(X_1,X_2,\cdots,X_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}$$

故 $\gamma\in L(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)$

所以，$L(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)\cap L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$，

$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$ 线性无关(∵交的维数为 m).

当然，亦可直接证明 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 线性无关.

即若 $\sum_{i=1}^{m} k_i\gamma_i=0$

$$\sum_{i=1}^{m} k_i\gamma_i=(\sum_{i=1}^{m} k_i x_{i1})\alpha_1+\cdots+(\sum_{i=1}^{m} k_i x_{is})\alpha_s$$

$$=(-\sum_{i=1}^{m} k_i y_{i1})\beta_1+\cdots+(-\sum_{i=1}^{m} k_i y_{it})\beta_t$$

$=0$

有 $\sum_{i=1}^{m} k_i x_{i1}=0,\cdots,\sum_{i=1}^{m} k_i x_{is}=0,\quad \sum_{i=1}^{m} k_i y_{i1}=0,\cdots,\sum_{i=1}^{m} k_i y_{it}=0.$

此即 $k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_m\eta_m=0$

$\because\ \eta_1,\cdots,\eta_m$ 是(1)的基础解系， $\therefore k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

故 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 线性无关.

注：若求一般线性空间 V 的子空间 V_1 与 V_2 的交，须取定基底，找生成元的坐标，将问题转化到 P^n 中去，求出 $L(\gamma_1,\cdots,\gamma_m)$，再令 $\omega_t=(\text{基底})\gamma_i$，则 $L(\omega_1,\cdots,\omega_m)$ 为所求.

5. 子空间的直和

定义 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 为线性空间 V 的子空间. 且 $W=V_1+V_2+\cdots+V_s$， 若$\forall\ \alpha\in W,\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\alpha_i\in V_i$，

$i=1,\cdots,s$

这种表示是唯一的，则称 $W=V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

记为 $W=V_1\dot{+}V_2\dot{+}\cdots\dot{+}V_s$ 或 $W=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$.

性质 设 $V_1,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的子空间，且 $W=V_1+V_2+\cdots+V_s$，则下列命题等价：

(1)和 $W=V_1+\cdots+V_s$ 是直和.

(2)零向量关于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中向量的和的表示法唯一.

(3) $V_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{s} V_j = \{0\}$

(4) $V_j \cap (V_1 + \cdots + V_{j-1}) = \{0\}, \quad j=2,3,\cdots,s$

(5) $\dim W = \sum_{i=1}^{s} \dim V_i$（此条须 V 为有限维空间）

证明　（略）

命题 4　设 V_1 是 n 维线性空间 V 的一个 r 维子空间，则存在 V 的 $n-r$ 维子空间 V_2，使 $V=V_1 \oplus V_2$（称 V_2 为 V_1 的直和补空间或简称直补或叫余空间）并问 V_2 是否唯一存在？

证明　设 V_1 的基底为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$，将其扩充成 V 的基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，

则　$V_2=L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)$，可以证明　$V=V_1 \oplus V_2$，

V_1 的直补存在但不唯一.

例如，P^2 中 $\alpha_1=(1,0)$，　$\alpha_2=(0,1)$，　$\alpha_3=(1,1)$

令 $V_1=L(\alpha_1)$，　$V_2=L(\alpha_2)$，　$V_3=L(\alpha_3)$，

$P^2=V_1 \oplus V_2$，　$P^2=V_1 \oplus V_3$，但 $V_2 \neq V_3$

命题 5　设 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$是 n 维线性空间 V 的一个 r 维真子空间，其直接补空间 $N=L(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$，又设

$M=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$是 V 的 $n-r$ 维子空间.

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_{n-r})\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

这里，A_1 为 $r\times(n-r)$阵，　A_2 为$(n-r)\times(n-r)$阵.

则　M 是 W 的直补空间的充分必要条件是 $|A_2|\neq 0$，进而 $M=N \Longleftrightarrow A_1=0$，　$|A_2|\neq 0$

证明　$\Longrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$为 V 的基

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\eta_1,\cdots\eta_{n-r})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})\begin{pmatrix}E_r & A_1\\0 & A_2\end{pmatrix}$$

因$\begin{pmatrix}E_r & A_1\\0 & A_2\end{pmatrix}$非退化， 故$|A_2|\neq 0$.

$\Longleftarrow(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$
$\begin{pmatrix}E_r & A_1\\0 & A_2\end{pmatrix}$

因，$|A_2|\neq 0$， 故$\begin{pmatrix}E_r & A_1\\0 & A_2\end{pmatrix}$非退化，因而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$为 V 的基. 所以 M 是 W 的直补.

又，若 $A_1=0$， $|A_2|\neq 0$，则 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$与 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-r}$等价. 反之，易证成立.

例 20 设 W 是线性空间 V 的子空间 $\alpha\in V$， $\alpha\neq 0$，则和 $L(\alpha)+W$ 是直和的充要条件是 $\alpha\bar{\in} W$

证明 （略）

例 21 设 $V_1,V_2,\cdots,V_r$ 是 n 维线性空间 V 的子空间. 且$\sum_{i=1}^{r}$ 维 $V_i=n$， 则 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_r$ 的命题是否正确？

证明 该命题不正确.

例如 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 中两两不平行的三个共面向量，虽然有$\sum_{i=1}^{3}\dim L(\alpha_i)=3$

但， $\dim(L(\alpha_1)+L(\alpha_2)+L(\alpha_3))=2$

例 22 设 V_1,V_2 为 n 维空间 V 的两个 m 维子空间 $(0<m<n)$

求证：存在子空间 W， 使 $V=V_1\oplus W=V_2\oplus W$

证明 对 $n-m$ 作归纳法.

当 $n-m=1$ 时，$n=m+1$，V_1,V_2 为 V 的真子空间，存在 $\varepsilon\in V$，$\varepsilon\overline{\in}V_1$，$\varepsilon\overline{\in}V_2$，则 $W=L(\varepsilon)$

这是因为：可设 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

$V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\varepsilon)$. $\therefore V=V_1\oplus W$

同理 $V=V_2\oplus W$

假设命题对于 $n-m=K$ 时成立，现看

$n-m=k+1$ 时，可令 $V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$，$\varepsilon\overline{\in}V_1$，$\varepsilon\overline{\in}V_2$，

令 $V'_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\varepsilon)$，$V'_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_m,\varepsilon)$

有 $V'_1=V_1\oplus L(\varepsilon)$，$V'_2=V_2\oplus L(\varepsilon)$

$\dim V'_1=\dim V'_2=m+1$

$\because$ $n-(m+1)=n-m-1=k+1-1=k$，

由归纳假定，存在子空间 W'，使

$V=V'_1\oplus W'$，$V=V'_2\oplus W'$

但 $V=V_1\oplus L(\varepsilon)\oplus W'$，$V=V_2\oplus L(\varepsilon)\oplus W'$

取 $W=L(\varepsilon)\oplus W'$ 即得.

当 W 是 V_1 的直补时，V_1 也是 W 的直补，此题也说明了一个子空间的直补一般不唯一.

例 23 设 A 为数域 P 上的幂等阵，即 $A^2=A$，

齐次方程组 $AX=0$ 的解空间为 W_1，$(A-E)X=0$ 的解空间为 W_2，则有 $P^n=W_1\oplus W_2$

证明 $\forall\alpha\in P^n$，$\alpha=-(A\alpha-\alpha)+A\alpha$

$A(A\alpha-\alpha)=A^2\alpha-A\alpha=0$，即 $(A\alpha-\alpha)\in W_1$，

$(A-E)A\alpha=A^2\alpha-A\alpha=0$，即 $A\alpha\in W_2$，

此即，$P^n=W_1+W_2$.

又若　$\beta \in W_1 \cap W_2$，　有 $A\beta=0$，

$(A-E)\beta=A\beta-\beta=-\beta=0$，　故 $\beta=0$

因此，　$P^n=W_1 \oplus W_2$.

四、商空间(剩余类空间)

设 W 是数域 P 上线性空间 V 的子空间，$\forall\ \alpha \in V$，令

$\bar{\alpha}=\alpha+W=\{\alpha+\beta|,\quad \beta \in W, \alpha \in V\}$

$V/W=\bar{V}=\{\bar{\alpha}|\alpha \in V\}$

则有，$\bar{\alpha}=\bar{\eta} \Longleftrightarrow \alpha-\eta \in W$.

事实上，若 $\bar{\alpha}=\bar{\eta}$，　$\alpha+W=\eta+W$，存在 $\gamma \in W$，使 $\alpha=\eta+\gamma$，　故 $\alpha-\eta=\gamma \in W$.

反之，$\alpha-\eta \in W$，　设 $\alpha-\eta=\gamma$，　任取 $\alpha_1 \in \bar{\alpha}$

必有 $\gamma_1 \in W$，使 $\alpha_1=\alpha+\gamma_1=\eta+(\gamma+\gamma_1) \in \bar{\eta}$，　即有 $\bar{\alpha} \subseteq \bar{\eta}$，

同理 $\bar{\eta} \subseteq \bar{\alpha}$，　故 $\bar{\alpha}=\bar{\eta}$

规定 V/W 的加法：$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$，　数乘：$k\ \bar{\alpha}=\overline{k\alpha}$

容易验证，这种规定与 V/W 中元素的代表选择无关.

V/W 对加法及数乘作成线性空间. 还可以证明：当 V 是 n 维线性空间时，W 是 m 维子空间，则商空间 V/W 的维数是 $n-m$.

证明　设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ 是 W 的基底，将其扩成 V 的基底：$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1} \cdots, \varepsilon_n$ 可以证明 $\bar{\varepsilon}_{m+1}, \bar{\varepsilon}_{m+2}, \cdots, \bar{\varepsilon}_n$ 是 V/W 的基底.

若 $k_{m+1}\bar{\varepsilon}_{m+1}+k_{m+2}\bar{\varepsilon}_{m+2}+\cdots+k_n\bar{\varepsilon}=\bar{0}$

$(\bar{0}=0+W=W)$　即有

$\overline{(k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+k_{m+2}\varepsilon_{m+2}+\cdots+k_n\varepsilon_n)}=\overline{0}$

故有，$k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+k_{m+2}\varepsilon_{m+2}+\cdots+k_n\varepsilon_n\in W$

因而有，$k_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+k_n\varepsilon_n=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m$

$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m-k_{m+1}\varepsilon_{m+1}-\cdots-k_n\varepsilon_n=0$

$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m,\varepsilon_{m+1}\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

故 $k_1=k_2=\cdots=k_m=k_{m+1}=\cdots=k_n=0$

即 $\overline{\varepsilon}_{m+1},\overline{\varepsilon}_{m+2},\cdots,\overline{\varepsilon}_n$ 线性无关.

$\forall\ \eta\in V/W,\eta=b_1\varepsilon_1+\cdots+b_m\varepsilon_m+b_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+b_n\varepsilon_n$

$\eta-(b_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+b_n\varepsilon_n)=b_1\varepsilon_1+\cdots+b_m\varepsilon_m\in W$

故 $\overline{\eta}=\overline{(b_{m+1}\varepsilon_{m+1}+\cdots+b_n\varepsilon_n)}=b_{m+1}\overline{\varepsilon}_{m+1}+b_{m+2}\overline{\varepsilon}_{m+2}+\cdots+b_n\overline{\varepsilon}$，所以，$\dim(V/W)=n-m$.

类似于加群，对于线性空间的同态映射、商空间与同态的关系的若干结论，读者可以自己讨论.

五、线性空间的同构

定义 在同一数域 P 上的两个线性空间 V 与 W 之间，如果存在一个保持运算关系的一一映射 σ，$\forall\ \alpha,\beta\in V,k\in P$，$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$ 称 σ 是 V 到 W 的同构映射，这时，称 V 与 W 同构.

性质 设 V 与 W 是数域 P 上两个同构的线性空间，σ 是同构映射，对于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性相关.

$\sigma(\sum k_i\alpha_i)=\sum k_i\sigma(\alpha_i)$.

同一个数域 P 上两个有限维线性空间 V 与 W 同构的充要条件是 $\dim V=\dim W$

同构关系具有反身性，对称性，传递性. 因而是数域 P 上全体线性空间集合的一个分类关系（即等价关系），$V\supseteq M$，则 M 是子空间 $\Longleftrightarrow\sigma(M)$ 是 W 的子空间.

数域 P 上任意 n 维向量空间 V 与 P^n 同构. P^n 可以作为这一类线性空间的代表. 可以把 V 中的问题转化到 P^n 的问题来处理. 这样可能方便些. 但要注意，不能保持元素对应关系的那些运算性质是不能传递的.

例 25 设数域 P 上线性空间 V，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in V$，且线性无关，向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可以由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性表示：

$$\beta_i=\sum_{k=1}^{r}a_{ki}\alpha_k$$

$(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)A$，　$A=(a_{ij})$ 为 $r\times m$ 矩阵，则秩$(\beta_1,\cdots,\beta_m)=$ 秩 A，　且 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 与 A 的列向量有相同的线性关系.

证法一　令 $A=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$

$$\theta=\gamma=(\beta_1\cdots,\beta_m)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=\theta$$

$$\Longleftrightarrow A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=(\eta_1\cdots,\eta_m)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}=0$$ 故 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 与 $\eta_1\cdots,\eta_m$ 有相同的线性关系，当然就有相同的秩.

证法二　将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 扩充成 V 的基

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$　（设 $\dim V=n$）

$\forall\ \beta\in V,\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$

映射：$\beta \longrightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ 使 V 与 P^n 同构.

$$(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的秩$=$秩$\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}=$秩 A

证法三 映射：$\psi:\sum_{i=1}^{m}k_i\beta_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{m}k_i\eta_i$，为 A 的列向量，使 $L(\beta_1,\cdots,\beta_m)\cong L(\eta_1,\cdots,\eta_m)$，由维数相等，得证.

例 26 无限维空间可以与它的一个真子空间同构.

解 例如，数域 P 上 $W=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\mid a_i\in P,i\in N\}$加法数乘按通常定义：子空间 $W_1=\{(0,a_1,0,a_2,\cdots)\}$

映射：$\sigma:(a_1,a_2,\cdots,a_3,\cdots)\longrightarrow(0,a_1,0,a_2,0,\cdots)$

使 $W\overset{\sigma}{\cong}W_1$

第七章　线性变换

一、线性映射与线性变换环　$\mathrm{Hom}_P(V,V)$

1. 定义

设 V、W 是数域 P 上的两个线性空间，如果映射 φ: $V \longrightarrow W$ 满足 $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$，　$\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$，$\forall\ \alpha,\beta\in V$，　$k\in P$，称 φ 是 V 到 W 的一个线性映射. 当 $V=W$ 时，称 φ 为 V 的一个线性变换.

数域 P 上线性空间 V 到 W 的线性映射的全体集合记为 $\mathrm{Hom}_P(V,W)$（或 $L(V,W)$）.

性质　(1)数域 P 上线性空间 V 到 W 的映射 φ 是线性映射的充要条件是：$\forall\ \alpha,\beta\in V,k_1,k_2\in P$，均有 $\varphi(k_1\alpha+k_2\beta)=k_1\varphi(\alpha)+k_2\varphi(\beta)$，一般地，

$\varphi(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)=k_1\varphi(\alpha_1)+\cdots+k_m\varphi(\alpha_m)$

(2)若 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,W)$，则 φ 是 V 到 W 的一个同态，若 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$，则 φ 是 V 的一个自同态；当 φ 是 1—1 的，则 φ 是同构.

(3)若 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,W)$，$V_1$ 是 V 的子空间，则 $\varphi(V_1)$ 是 W 的子空间，称 $\varphi(V)$ 为 φ 的值域，记为 $\varphi(V)=\mathrm{Im}(\varphi)$

若 W_1 是 W 的子空间，W_1 在 φ 的作用下逆象的集合是 V 的一个子空间. W 中零元的逆象，称为 φ 的核，记为

$\mathrm{Ker}(\varphi)=\{\xi\in V|\varphi(\xi)=0\}$,或 $\varphi^{-1}(0)$

(4)若 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,W)$,则 φ 是满射的充要条件是

$\mathrm{Im}(\varphi)=W$; φ 是单射的充要条件是 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$. 若 V 是 n 维空间,则有 $\dim \mathrm{Im}(\varphi)+\dim \mathrm{Ker}(\varphi)=n$ (dim 表维数)

φ 可逆的充要条件是 φ 是双射.

例 1 证明 n 维线性空间 V 的任一子空间 L 必为某线性变换的核.

证明 可设 $V=L\oplus W$, W 是子空间, $\forall\ \alpha\in V$

有 $\alpha=\beta+\gamma$, $\beta\in L$, $\gamma\in W$

令 $\varphi(\alpha)=\gamma$,则 φ 是线性变换. $\forall\ \beta\in L,\beta\in V$,

$\beta=\beta+0$, $\varphi(\beta)=0$

对 $\eta\in V$,若有 $\varphi(\eta)=0$, $\eta=\eta_1+\eta_2$,

$\eta_1\in L$, $\eta_2\in W$, $\varphi(\eta)=\eta_2=0$

故必 $\eta=\eta_1\in L$, $\therefore L$ 为线性变换 φ 的核,得证.

例 2 n 维线性空间 V 可写成二真子空间的直和,

$V=W_1\oplus W_2$, φ 是 V 的线性变换,证明:

φ 可逆 $\Longleftrightarrow V=\varphi(W_1)\oplus\varphi(W_2)$

证明 $V=W_1\oplus W_2$,分别取 W_1 与 W_2 的基. $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 及 $\beta_1,\cdots,\beta_s$, 则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 为 V 的基.

若 φ 可逆,则 $\varphi(\alpha_1),\cdots,\varphi(\alpha_r),\varphi(\beta_1),\cdots,\varphi(\beta_s)$ 为 V 的基.

故 $V=L(\varphi(\alpha_1),\cdots,\varphi(\alpha_r))\oplus L(\varphi(\beta_1),\cdots,\varphi(\beta_s))=$

$\varphi(W_1)\oplus\varphi(W_2)$

反之,维 $\varphi(W_1)+$维 $\varphi(W_2)=n=r+s$

维 $\varphi(W_1)\leqslant r$, 维 $\varphi(W_2)\leqslant s$,必取等号.

故 $\varphi(\alpha_1),\cdots,\varphi(\alpha_r),\varphi(\beta_1),\cdots,\varphi(\beta_s)$ 为 V 的基,因此,φ 可逆.

2. $\mathrm{Hom}_P(V,W)$**作成数域** P **上线性空间**

定义加法及数乘法则$(\varphi+\psi)(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)$，$(k\varphi)(\alpha)=k(\varphi(\alpha))$， $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}_P(V,W)$， $\alpha\in V$， $k\in P$

可证 $\varphi+\psi$， $k\varphi$ 均是线性映射. 而且，$\mathrm{Hom}_P(V,W)$

对规定的加法及数乘做成 P 上的一个线性空间.

若 $\varphi_1\in\mathrm{Hom}_P(V,W)$， $\varphi_2\in\mathrm{Hom}_P(W,U)$

乘法定义 $(\varphi_1\varphi_2)(\alpha)=\varphi_1(\varphi_2(\alpha))$ 可以证明，该乘法法则是 V 到 U 的线性映射.

3. $\mathrm{Hom}_P(V,V)$**对线性变换的加法及乘法作成环，称为线性变换环**

例 3 $\mathrm{Hom}_P(P^n,P^m)$中线性映射 φ 均可以表示为唯一的 $\varphi(\alpha)=A\alpha$ 的形式，

$\alpha\in P^n,A\in P^{m\times n}$

证明 一方面，任意取定 $A\in P^{m\times n}$，令 $\varphi(\alpha)=A\alpha$，$\alpha\in P^n$

可以证明 φ 是映射，是线性映射

$\varphi(k_1\alpha+k_2\beta)=A(k_1\alpha+k_2\beta)=k_1A\alpha+k_2A\beta$
$=k_1\varphi(\alpha)+k_2\varphi(\beta)$

另一方面，$\forall\ \varphi\in\mathrm{Hom}_P(P^n,P^m)$

$$\varphi(e_i)=\beta_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{mi}\end{pmatrix},\quad e_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}(i\text{ 行})$$

$$\forall\ \alpha\in P^n,\quad \alpha=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

$$\varphi(\alpha)=\varphi(x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n)$$

$$=x_1\varphi(e_1)+x_2\varphi(e_2)+\cdots+x_n\varphi(e_n)=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A\alpha$$

这里，$A=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(a_{ij})_{m\times n}$

注：这是一种线性映射的表示方法．一般说来，线性映射的表示方法不只是一种，但不论是哪种表示法都必须对于 V 中已知元素在此映射法则下有确定的象．P^n 空间中的线性变换 φ，均可表为 $\varphi(\alpha)=A\alpha$， $\alpha\in P^n$，A 为 $P^{n\times n}$ 中一确定阵的形式．

二、环 $\mathrm{Hom_p}(V,V)$ 与环 $P^{n\times n}$ 同构，（V 为 n 维空间）

线性变换 φ 的矩阵表示：选定 V 的基底：$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

$$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$$

$A=(a_{ij})$ 的第 j 列是 $\varphi(\varepsilon_j)$ 由 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示的坐标系数．

映射 $f:\varphi\longrightarrow A$ 是 $\mathrm{Hom_P}(V,V)$ 到 $P^{n\times n}$ 的一一映射．

①f 是映射：∵当 φ 取定后，基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 选定后，则 A 唯

一确定.

②f 是满射:$\forall\ A\in P^{n\times n}$, $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

存在线性变换 φ, 使 $\varphi(\varepsilon_i)=\alpha_i$,且唯一存在.

③f 是单射:$\varphi\longrightarrow A$, $\sigma\longrightarrow B$, $\varphi\neq\sigma$ 时, $A\neq B$.

因此,f 是 $Hom_P(V,V)$ 到 $P^{n\times n}$ 的一一映射,且有

$\varphi+\sigma\longrightarrow A+B$,即 $f(\varphi+\sigma)=A+B$

$f(\varphi\sigma)=AB$, $f(k\varphi)=kA$

若 φ 可逆,则 $f(\varphi^{-1})=A^{-1}$.

所以,f 是 $Hom_P(V,V)$ 到 $P^{n\times n}$ 上的同构映射,

$Hom_P(V,V)\cong P^{n\times n}$

这样,对线性变换有关问题的研究,可以转化到相应的矩阵问题上. 反之,亦可.

向量 α 在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标与象 $\varphi(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标的关系: $\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$

若 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $\varphi(\alpha)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

则 $\varphi(\alpha)=(\varphi(\varepsilon_1),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

故 $\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

三、$P^{n\times n}$中的相似分类，相似于对角阵的条件，特征多项式与最小多项式

1. 线性变换在不同基下的矩阵相似

设 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$， V 的两组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$， $(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)P$

$\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$， $\varphi(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)B$

则 $\varphi(\eta_1,\cdots,\eta_n)=\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)P=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)AP$

$=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P^{-1}AP$

$\therefore B=P^{-1}AP$，称 A 与 B 相似，记为 $A\sim B$. 反之，相似矩阵($A\sim B$)必是某一个线性变换在不同基下的矩阵.

已知基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，

而$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$

确定线性变换 φ，

$\because A\sim B$，故存在非退化阵 P，使 $B=P^{-1}AP$

则$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)P$ 为 V 的基底

且 $\varphi(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)B$

矩阵的相似关系，满足反身性($A\sim A$)，对称性(若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$)，传递性(若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$)，因而是等价关系(分类关系)，所以可将 $P^{n\times n}$中矩阵分成若干个互不相交的类，每一类有个标准形矩阵——若当标准形 (可以作为该类的代表矩阵).

我们先研究简单的标准矩阵——对角矩阵，为此，须研究特征值，特征向量.

2. 特征值与特征向量

定义 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$，若存在 $\lambda\in P$，$\alpha\in V,\alpha\neq 0$，使 $\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$，称 λ 为 φ 的特征值，α 为 φ 的属于特征值 λ 的特征向量.

一个特征值可以有不同的特征向量，但，一个特征向量只能属于一个特征值.

特征值与特征向量的求法

取 V 的基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，则有 $\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，$|\lambda E-A|=f(\lambda)$ 称为 A 的特征多项式，也是 φ 的特征多项式. 特征多项式的根称为 φ（或 A）的特征值（根）.

若 λ_1 使 $f(\lambda_1)=0$，求

$$(\lambda_1 E-A)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \text{的非零解} \begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

则 $\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$ 为 φ 的属于 λ_1 的特征向量.

上面齐次线性方程组的解空间，即为 A 的属于特征值 λ_1 的特征子空间，记为 V_{λ_1} 其维数称为 λ_1 的几何重复度. λ_1 在 $f(\lambda)$ 的根中的重数，称为 λ_1 的代数重复度.

若 $V_{\lambda_1}=L(\xi_1,\cdots,\xi_t)$，$\alpha_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\xi_i$，$i=1,2,\cdots,t$，则 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t)$ 为 φ 的属于特征值 λ_1 的特征子空间.

例 4 设 σ 为复数域上三维线性空间 V 的线性变换，已知 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 求 σ 的特征值

与特征向量.

解 σ 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

即得 σ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\quad \lambda_3=-1$

解方程组 $(E-A)X=0$,得基础解系:

$\xi_1=(1,0,1)',\quad \xi_2=(0,1,0)'$ 而

$\alpha_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\xi_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3,\quad \alpha_2=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\xi_2=\varepsilon_2$

是 σ 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量.

$\therefore A$ 的属于特征值 1 的特征子空间为 $L(\xi_1,\xi_2)$,

σ 的属于特征值 1 的特征子空间为 $L(\alpha_1,\alpha_2)$.

再解方程组 $(-E-A)X=0$,得基础解系:

$\eta_1=(1,0,-1)'$,则 $\beta_1=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\eta_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3$ 为 σ 的属于特征值 -1 的特征向量.

$\therefore A$ 的属于特征值 -1 的特征子空间为 $L(\eta_1)$

σ 的属于特征值 -1 的特征子空间为 $L(\beta_1)$.

(特征子空间中的非零向量为特征向量)

注意 不同线性变换可能有相同的特征值,而有不同的特征向量.例如:

$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ 的特征值均为 1,2.

但特征向量不同.

同样,不同线性变换,可能有相同的特征向量,而特征值不同.

例如，$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$的属于特征值 1 的特征向量.

亦为$\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}$的属于特征值 2 的特征向量

性质 (1)若 φ 的特征值为 λ，则 φ^2 的特征值为 λ^2，φ^k 的特征值为 λ^k， $a\varphi$ 的特征值为 $a\lambda$.

证明提示：$\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$，

$\varphi^2(\alpha)=\varphi(\varphi(\alpha))=\varphi(\lambda\alpha)=\lambda\varphi(\alpha)=\lambda\lambda\alpha=\lambda^2\alpha$

(2)$\forall\ f(x)\in P[x]$，若 λ 是 φ 的特征值，则 $f(\varphi)$的特征值为 $f(\lambda)$.（证略）

(3)若 φ 可逆，φ 的特征值为 λ，则 φ^{-1}的特征根为$\frac{1}{\lambda}$

证明 ①$\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$， $\alpha=\varphi^{-1}\varphi\alpha=\varphi^{-1}(\lambda\alpha)=\lambda\varphi^{-1}(\alpha)$，故 $\varphi^{-1}(\alpha)=\frac{1}{\lambda}\alpha$

(4)若 φ 可逆，φ 的特征根 λ，则 φ 的伴随变换 φ^* 的特征根为$\frac{1}{\lambda}|A|$， $\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$.

证明 $AA^*=|A|E$， $A^*=|A|A^{-1}$，

$A\alpha=\lambda\alpha$， $A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$， $A^*\alpha=|A|A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}|A|\alpha$

(5)若 φ 不可逆，$\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，若秩 $\varphi=$秩 $A<n-1$，则秩 $A^*=0$，A^* 的特征值为 0，若秩 $\varphi=$秩 $A=n-1$，则秩 $A^*=1$，则 A^* 有一个 $n-1$ 重特征根零及一个单特征根 $A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn}$，($A=(a_{ij})$，$A_{ii}$是 a_{ii}的代数余子式)

证明 $|\lambda E-A^*|=\lambda^n-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})\lambda^{n-1}$
$=\lambda^{n-1}[\lambda-(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})]$

注：若 秩 $A=r$，则 0 至少是 A 的 $n-r$ 重特征根.

(6)不同特征值的特征向量线性无关.

(7)$A\sim B, B=P^{-1}AP$,则 A 与 B 有相同的特征值。若 α 是 A 的特征向量,则 $P^{-1}\alpha$ 为 B 的特征向量.

证明 $|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|\lambda E-A|$

A 与 B 的特征多项式相同,∴A 与 B 的特征根相同.

又 $A\alpha=\lambda\alpha$, $PBP^{-1}\alpha=\lambda\alpha$

$$B(P^{-1}\alpha)=P^{-1}\lambda\alpha=\lambda(P^{-1}\alpha)$$

即 $P^{-1}\alpha$ 为 B 的特征向量.

(8)已知 $A\in P^{n\times n}$, $\alpha\in P^n$ 是 A 的特征向量.

则 α 属于的特征值 $\lambda=\dfrac{\alpha' A\alpha}{\alpha'\alpha}$

证明 $A\alpha=\lambda\alpha$, $\alpha' A\alpha=\alpha'\lambda\alpha=\lambda\alpha'\alpha$

∴ $\lambda=\dfrac{\alpha' A\alpha}{\alpha'\alpha}$ (∵$\alpha\neq 0$, $\alpha'\alpha\neq 0$)

(9)设 A,B 为 n 阶方阵,则$\triangle_{AB}(\lambda)=\triangle_{BA}(\lambda)$

证法一 $\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda E & A \\ B & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E-AB & 0 \\ B & E \end{pmatrix}$

两端取行列式得 $\begin{vmatrix} \lambda E & A \\ B & E \end{vmatrix}=|\lambda E-AB|$

再由 $\begin{pmatrix} \lambda E & A \\ B & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & \lambda E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ B & \lambda E-BA \end{pmatrix}$

两端取行列式得

$$|\lambda E-AB|\cdot\lambda^n=\lambda^n|\lambda E-BA|$$

$$\therefore |\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$$

注意:当 $i_1,\cdots,i_m$ 是 $1,2,\cdots,m$ 的一个循环排列时,

则 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{im}$与 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 有相同的特征多项式,因而有相同的迹.

证法二

A,B 中有一个非奇异,可设$|A|\neq 0$

$BA=A^{-1}ABA$；　$BA\sim AB$，$\therefore \triangle_{BA}(\lambda)=\triangle_{AB}(\lambda)$

当$|A|=0$时，由于$|\lambda E-A|$或$|A-\lambda E|$只有有限个根，因此，存在t，使$|A-tE|\neq 0$

则　$B(A-tE)$与$(A-tE)B$有相同的特征多项式，

即$|\lambda E-BA+tB|=|\lambda E-AB+tB|$

将上式看成t的多项式，有无限t使上式成立，因而它必是零多项式，从而在$t=0$时仍成立

$\therefore |\lambda E-AB|=|\lambda E-BA|$.

证法三

$$\begin{pmatrix}0 & E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & A\\ B & \lambda E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & E\\ E & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda E & B\\ A & E\end{pmatrix}$$

两边取行列式再分别乘值为1的行列式得：

$$\begin{vmatrix}E & 0\\ -B & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}E & A\\ B & \lambda E\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}E & 0\\ -A\lambda^{-1} & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\lambda E & B\\ A & E\end{vmatrix}$$

即有

$$\begin{vmatrix}E & A\\ 0 & \lambda E-BA\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E & B\\ 0 & E-\lambda^{-1}AB\end{vmatrix}$$

故　$|\lambda E-BA|=|\lambda E||E-\lambda^{-1}AB|=|\lambda E-AB|$

当$A_{n\times m}$，$B_{m\times n}$　且$n>m$时，有

$$\begin{vmatrix}E_n & A\\ 0 & \lambda E_m-BA\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda E_m & B\\ 0 & E_n-\lambda^{-1}AB\end{vmatrix}$$

$$|E_n||\lambda E_m-BA|=|\lambda E_m||E_n-\lambda^{-1}AB|$$

$$|\lambda E_{n-m}||\lambda E_m-BA|=|\lambda E_{n-m}||\lambda E_m||E_n-\lambda^{-1}AB|$$

$$=|\lambda E_n||E_n-\lambda^{-1}AB|$$

所以$\lambda^{n-m}|\lambda E_m-BA|=|\lambda E_n-AB|$

即：$\triangle_{AB}(\lambda)=\lambda^{n-m}\triangle_{BA}(\lambda)$.

例 5　设 $A\in R^{n\times n}$，　$\forall\ \alpha\in R^n$，均有 $\alpha' A\alpha>0$，则 $|A|>0$

证明　设　$A\beta=\lambda\beta$，　$\lambda\in C$，　$0\neq\beta\in C^n$

$\lambda=a+bi$，　$\beta=\eta+\gamma i$，　$\eta,\gamma\in R^n$

有 $A(\eta+\gamma i)=(a+bi)(\eta+\gamma i)$

$$\begin{cases}A\eta=a\eta-b\gamma\\A\gamma=a\gamma+b\eta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\eta' A\eta=a\eta'\eta-b\eta'\gamma\\\gamma' A\gamma=a\gamma'\gamma+b\gamma'\eta\end{cases}$$

两式相加：$\eta' A\eta+\gamma' A\gamma=a(\eta'\eta+\gamma'\gamma)>0$

但，$\eta'\eta+\gamma'\gamma>0$，故 $a>0$

A 的特征根，除实数外，虚根成对出现，$|A|$ 等于其特征值的乘积. 因此，$|A|>0$

例 6　设 φ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换，λ_0 是 φ 的一个 特征值. 试证，对于任意一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_n$，都存在一组基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，使 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i$　是 φ 的属于 λ_0 的特征向量.

证明　设 $\varphi(\alpha_1)=\lambda_0\alpha_1$，　$\alpha_1\neq 0$，

将 α_1 扩充成 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

令 $\beta_1=(k_1,\cdots,k_n)'$ 将其扩成 P^n 的基

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，　令　$T=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$

则　$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)T^{-1}$ 为 V 的基.

其中 $\alpha_1=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i$.

例 7　设 A 为 n 阶非负矩阵(即 $A=(a_{ij})$，　$a_{ij}\geqslant 0$). 若对任意 $i=1,2,\cdots,n$，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}=1$，则称 A 为概率矩阵. 求证，

概率矩阵必有特征值 1,且所有特征值的绝对值不超过 1.

证明 令 $x=(1,1,\cdots,1)'$,则 $Ax=1x$,

$\therefore A$ 有特征值 1.

若有 $|\lambda|>1$ 使 $A\alpha=\lambda\alpha$, $\alpha\neq 0$, $\alpha=(b_1,\cdots,b_n)'$

设 $\max\{|b_1|,\cdots,|b_n|\}=|b_k|>0$

由 $A\alpha=\lambda\alpha$, 可得 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}b_j=\lambda b_k$

$$|b_k|<|\lambda||b_k|=|\lambda b_k|\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_{kj}|b_j|$$

$\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}|b_k|=1\cdot|b_k|=|b_k|$ 矛盾,故有 $|\lambda|\leqslant 1$.

例 8 $A,B\in P^{n\times n}$ 且 A 的特征值两两互异,则 A 的特征向量恒为 B 特征向量的充要条件是 $AB=BA$

证明 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ A 的属于 λ_i 的特征向量为 α_i;即 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

$\Longrightarrow$: α_i 是 B 的特征向量, $B\alpha_i=t_i\alpha_i$

$$B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & \ddots \\ & & & t_n\end{pmatrix}$$

$$A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令 $P^{-1}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

$$AB=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}PP^{-1}\begin{pmatrix}t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n\end{pmatrix}P$$

$$=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 t_1 & & & \\ & \lambda_2 t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n t_n\end{pmatrix}P=BA$$

$\Longleftarrow A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$， V_{λ_i}特征子空间是一维的

$\because AB=BA$， $AB\alpha_i=BA\alpha_i=B(\lambda_i\alpha_i)=\lambda_i B\alpha_i$

即 $B\alpha_i\in V_{\lambda_i}$，所以 $B\alpha_i$ 可由 α_i 线性表示

$B\alpha_i=t_i\alpha_i$，即 α_i 为 B 的特征向量.

3. 特征多项式的性质

(1)$A\in P^{n\times n}$，A 的特征多项式$(A=(a_{ij}))$，

$\Delta_A(\lambda)=|\lambda E-A|=f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$=\lambda^n+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$

(S_k 为 A 所有 K 阶主子式的和)

特别地：$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$， $\prod\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

(2)A 为退化的$\Longleftrightarrow A$ 至少有一个特征值是 0

(3)$A\sim B$，则$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$

$A\sim B\Longleftrightarrow(\lambda E-A)$与$(\lambda E-B)$等价

(4)若$|\lambda E-A|=f(\lambda)$，则 $f(A)=0$

(Hamilton－Caylay)定理

迹的定义 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称$\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$为 A 的迹，记为 $\mathrm{tr}A$.

迹的性质 ①$\mathrm{tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$， ($\lambda_i$ 为 A 的特征根)

②$\mathrm{tr}(aA+bB)=a\,\mathrm{tr}A+b\,\mathrm{tr}B$

③相似矩阵的迹相同.

④$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A')$

⑤$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$

⑥若 $A=(a_{ij})$，则 $\mathrm{tr}(A'A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$

证明 $\because A'A=(C_{ij})$， $C_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}^2$

$\mathrm{tr}(A'A)=\sum_{i=1}^{n}C_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}^2$

例 9 设 A 为实矩阵，则 $\mathrm{tr}(AA')=0\Longleftrightarrow A=0$

证明 $\mathrm{tr}(AA')=0$， 即 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}^2=0$

$\Longleftrightarrow a_{ji}=0\Longleftrightarrow A=0$

例 10 将 n 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$的全体元素的平方和记为 $\sigma(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$， 求证：$A$ 是正交阵的充要条件是任意 n 阶实方阵 B，均有 $\sigma(ABA')=\sigma(B)$.

证明 显然 $\sigma(A)=\mathrm{tr}(A'A)$， $\mathrm{tr}(P'AP)=\mathrm{tr}A$ （P 为正交阵）

$\Longrightarrow \mathrm{tr}[(ABA')'(ABA')]=\mathrm{tr}(AB'BA')=\mathrm{tr}(B'B)$

所以 $\sigma(ABA')=\sigma(B)$

$\Longleftarrow \sigma(AEA')=\sigma(E)=\mathrm{tr}(E'E)=n=\sigma(AA')$

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

则：$\sigma(A(\alpha_i\alpha_j')A')=\sigma[(\alpha_i\alpha_j')]$

$=\mathrm{tr}[(\alpha_i\alpha_j')'(\alpha_i\alpha_j')]=\mathrm{tr}(\alpha_j\alpha_i'\alpha_i\alpha_j')$

$=(\alpha_i'\alpha_i)\mathrm{tr}(\alpha_j\alpha_j')=(\alpha_i'\alpha_i)(\alpha_j'\alpha_j)$ （$\because \alpha_i'\alpha_i$ 为一个数）

$AE_{ij}A'=\alpha_i\alpha_j'$， $\sigma(\alpha_i\alpha_j')=\sigma(AE_{ij}A')=\sigma(E_{ij})=1$

（对任意的 i、j 均成立）故$(\alpha_i'\alpha_i)(\alpha_j'\alpha_j)=1$

$\therefore \alpha_i\alpha_i'=1$（当 $i=j$ 时）

$$\therefore \sigma(A'A)=\sigma\left[\begin{bmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i'\alpha_i)^2+\sum_{i\neq j}(\alpha_i'\alpha_j)^2=n+\sum_{i\neq j}(\alpha_i'\alpha_j)^2=n$$

当 $i\neq j$ 时 $(\alpha_i'\alpha_j)=0$， 即 $A'A=E$

例 11 n 阶方阵 A、B、$\Delta_A(\lambda)=f(\lambda)$

则 $f(B)$ 降秩 $\Longleftrightarrow A$ 与 B 有公共特征值

证明 A、B 的特征值分别为：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 与 $u_1,u_2,\cdots,u_n$

$$\Delta_A(\lambda)=f(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$$

$$|f(B)|=|\prod(B-\lambda_iE)|=(-1)^n\prod|(\lambda_iE-B)|$$

$$=(-1)^n\prod_i\prod_j(\lambda_i-u_j)=0$$

$\Longleftrightarrow$ 存在 i,j 使 $\lambda_i=u_j$.

例 12 线性空间 C^n，A 为 C 上 n 阶方阵，$\alpha\in C^n$

$\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关，λ_0 是 A 的一个特征值，则特征子空间 V_{λ_0} 是一维的.

证明 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha$ 线性无关，是 C^n 的基

$\therefore A^n\alpha$ 可由上面的基线性表示，有

$$A^n\alpha=k_1\alpha+k_2A\alpha+\cdots+k_nA^{n-1}\alpha$$

$$A(\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha)=(\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha)\begin{bmatrix}0 & k_1\\ E_{n-1} & K\end{bmatrix}$$

其中 $K=(k_2,\cdots,k_n)'$， 令 $P=(\alpha,A\alpha,\cdots,A^{n-1}\alpha)$

有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & k_1\\ E_{n-1} & K\end{pmatrix}=T$

$$|\lambda_0 E-A|=|\lambda_0 E-T|=0$$

$(\lambda_0 E-T)$有 $n-1$ 阶子式不为零

故 $\operatorname{rank}(\lambda_0 E-T)=n-1$

$(\lambda_0 E-T)X=0$ 的解空间是一维的.

从而$(\lambda_0 E-A)X=0$ 的解空间 V_{λ_0} 是一维的.

例 13 证明:复数域上任一 n 阶矩阵 A,必与一个上三角形矩阵相似,并由此证明 Hamilton-Caylay 定理.

证明 对 n 用归纳法,存在 $A\alpha_1=\lambda\alpha_1,\alpha_1\neq 0$

将 α_1 扩成 C^n 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,令 $P_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

$$AP_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & \alpha'_{12}\cdots\alpha'_{1n}\\ 0 & \\ \vdots & A_1\\ 0 & \end{bmatrix},$$

A_1 是 $n-1$ 阶矩阵,由归纳假定存在非奇异 $n-1$ 阶阵 Q,使 $Q^{-1}A_1Q$ 为上三角阵,令 $P_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$, $P=P_1P_2$,则

$P^{-1}AP$ 为上三角阵,当 $n=1$ 时,显然成立.

再证:$|\lambda E-A|=f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

$f(P^{-1}AP)=(P^{-1}AP-\lambda_1 E)(P^{-1}AP-\lambda_2 E)\cdots(P^{-1}AP-\lambda_n E)$

$$=\begin{bmatrix}0 & & & & *\\ & \lambda_2-\lambda_1 & & & \\ & & \lambda_3-\lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & & & & \\ & 0 & & * & \\ & & \lambda_3-\lambda_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n-\lambda_2\end{bmatrix}\cdots$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1-\lambda_n & & & & \\ & \lambda_2-\lambda_n & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{n-1}-\lambda_n & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}=0$$

故 $f(A)=0$

例 14 $f(x)$为实系数多项式，求矩阵 A，使 $f(A)=0$.

解 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, $a_i\in R, a_n\neq 0$,

又设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是空间 R^n 的一组基

令 $\varphi(\varepsilon_i)=\varepsilon_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,n-1$, $\varphi(\varepsilon_n)=-\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^{n}a_{i-1}\varepsilon_i$

则 φ 为 R^n 的线性变换

$\varphi^{i-1}(\varepsilon_1)=\varepsilon_i \quad (1<i\leqslant n)$

于是 $f(\varphi)\varepsilon_1=\sum_{i=0}^{n}a_i\varphi^i(\varepsilon_1)=$

$a_0\varphi^0(\varepsilon_1)+a_1\varphi(\varepsilon_1)+a_2\varphi^2(\varepsilon_1)+\cdots+a_n\varphi^n(\varepsilon_1)$

$=a_0\varepsilon_1+a_1\varepsilon_2+a_2\varepsilon_3+\cdots+a_{n-1}\varepsilon_n+a_n\varphi(\varepsilon_n)=0$

$f(\varphi)\varepsilon_i=f(\varphi)\varphi^{i-1}\varepsilon_1=\varphi^{i-1}f(\varphi)\varepsilon_1=0$, $i=1,2,\cdots,n$

所以 $f(\varphi)$为零变换，φ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为

$A=\begin{pmatrix} 0 & S_1 \\ E_{n-1} & S \end{pmatrix}$，其中 $S_1=-a_0/a_n$

$S=-\frac{1}{a_n}(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})'$，有 $f(A)=0$

4. 最小多项式

定义 $\forall\ \varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$，非零 $f(x)\in P[x]$使

$f(\varphi)=0$，称 $f(x)$为 φ 的零化多项式. 称 φ 的次数最低的且首项系数为 1 的零化多项式为 φ 的最小多项式记为

$m_\varphi(\lambda)$.

∵ n 维空间 V 的线性 变换 φ 的零化多项式是存在的.

$m_\varphi(\lambda)$ 也是存在的且是唯一的.

$m_\varphi(\lambda)$ 不一定是既约的. 这是因为若 $m_\varphi(\lambda)=g(\lambda)S(\lambda)$, $m_\varphi(\varphi)=g(\varphi)S(\varphi)=0$, 而不能断定 $g(\varphi)=0$ 或 $S(\varphi)=0$. (∵环 $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 有零因子)

当 V 是 n 维空间时, ∵ $\mathrm{Hom}_P(V,V)\cong P^{n\times n}$

所以讨论 $m_\varphi(\lambda)$, 只要讨论 $m_A(\lambda)$ 即可.

性质 (1) $A\in P^{n\times n}$, $g(\lambda)\in P(\lambda)$, 若有 $g(A)=0$, 则 $m_A(\lambda)\mid g(\lambda)$.

证明 $g(\lambda)=m_A(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$

$r(\lambda)=0$ 或 $\partial(r(\lambda))<\partial(m_A(\lambda))$

$g(A)=m_A(A)q(A)+r(A)=0$

∴ $r(A)=0$, 由最小多项式定义必有 $r(\lambda)=0$

故 $m_A(\lambda)\mid g(\lambda)$

特别地 $m_A(\lambda)\mid\triangle_A(\lambda)=|\lambda E-A|$

(2)相似矩阵的最小多项式相等.

证明 $A\sim B$, $B=P^{-1}AP$, $m_A(A)=0$, $m_B(B)=0$,

$m_A(B)=m_A(P^{-1}AP)=P^{-1}m_A(A)P=0$

故 $m_B(\lambda)\mid m_A(\lambda)$, 同理 $m_A(\lambda)\mid m_B(\lambda)$ 且首项系数为 1, 所以 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$.

(3)设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$, 其中 A_1, A_3 均为方阵.

则 $\triangle_A(\lambda)=\triangle_{A_1}(\lambda)\triangle_{A_3}(\lambda)$.

$[m_{A_1}(\lambda), m_{A_3}(\lambda)]\mid m_A(\lambda)$

并且当 $A_2=0$ 时， $m_A(\lambda)=[m_{A_1}(\lambda),m_{A_3}(\lambda)]$

证明 $\triangle_A(\lambda)=\triangle_{A_1}(\lambda)\cdot\triangle_{A_3}(\lambda)$，显然成立.

$\forall\ f(\lambda)\in P[\lambda]$，均有 $f(A)=\begin{pmatrix} f(A_1) & * \\ 0 & f(A_3) \end{pmatrix}$

故 $m_A(A)=\begin{pmatrix} m_A(A_1) & * \\ 0 & m_A(A_3) \end{pmatrix}=0$

有 $m_A(A_1)=0$， $\therefore m_{A_1}(\lambda)\mid m_A(\lambda)$

$m_A(A_3)=0$， $\therefore m_{A_3}(\lambda)\mid m_A(\lambda)$

因此 $[m_{A_1}(\lambda),m_{A_3}(\lambda)]\mid m_A(\lambda)$

当 $A_2=0$ 时， 设 $[m_{A_1}(\lambda),m_{A_3}(\lambda)]=h(\lambda)$

$h(\lambda)=m_{A_1}(\lambda)q(\lambda)$，

$h(A_1)=m_{A_1}(A_1)q(A_1)=0$

同理 $h(A_3)=0$，故得 $h(A)=\begin{pmatrix} h(A_1) & \\ & h(A_3) \end{pmatrix}=0$

因此 $m_A(\lambda)\mid h(\lambda)$， $\because m_A(\lambda),h(\lambda)$ 首项系数均为 1，所以 $m_A(\lambda)=[m_{A_1}(\lambda),m_{A_3}(\lambda)]$

(4) A 的最小多项式是 $(\lambda E-A)$ 的最后一个不变因子，

$m_A(\lambda)=d_n(\lambda)$ 且 $\dfrac{\triangle_A(\lambda)}{m_A(\lambda)}=D_{n-1}(\lambda)$ （$n-1$ 阶行列式因子）

证明 设 A 的若当标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\lambda_s} \end{bmatrix}，\quad J_{\lambda_i} 为 k_i 阶若当块.$$

$\triangle_{J_{\lambda_i}}(\lambda)=|\lambda E-J_{\lambda_i}|=(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$

$\because m_{J_{\lambda_i}}(J_{\lambda_i})=(J_{\lambda_i}-\lambda_i E_{k_i})^{t_i}$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots 1 & 0 \end{bmatrix}^{t_i}=0$$

必有 $t_i=k_i$. 即 J_{λ_i}的最小多项式为$(\lambda-\lambda_i)^{k_i}$

$\forall\ g(x)\in P[x]$, 均有

$$g(J)=\begin{pmatrix} g(J_{\lambda_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & g(J_{\lambda_s}) \end{pmatrix}$$

$g(J)=0\Longleftrightarrow g(J_{\lambda_i})=0$, $i=1,2,\cdots,s$, 同样,

$m_J(J)=0\Longleftrightarrow m_{J\lambda_i}(J_{\lambda_i})=0$, $m_{J\lambda_i}(\lambda)\mid m_J(\lambda)$

m_J 是 $m_{J\lambda_i}(\lambda)$, $(i=1,2,\cdots,s)$的最小公倍式,即全部初等因子的最小公倍式,也就是最后一个不变因子.

$$\therefore\quad m_A(\lambda)=m_J(\lambda)=d_n(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=\frac{\triangle_A(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},$$

$$\therefore\frac{\triangle_A(\lambda)}{m_A(\lambda)}=D_{n-1}(\lambda)$$

(5)A 的任一特征根均是最小多项式的根

证法一 $\triangle_A(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$, $d_i(\lambda)$是不变因子, $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$

设 λ_0 为$\triangle_A(\lambda)$任一根,

则$(\lambda-\lambda_0)\mid\triangle_A(\lambda)$, $\therefore(\lambda-\lambda_0)\mid d_k(\lambda)$,

$\because\quad d_k(\lambda)\mid d_n(\lambda)$,

$d_n(\lambda)=m_A(\lambda)$

故$(\lambda-\lambda_0)\mid m_A(\lambda)$,即 λ_0 为 $m_A(\lambda)$的根

证法二 A 的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

但 $m_A(A)$ 的特征根为 $m_A(\lambda_1),m_A(\lambda_2),\cdots,m_A(\lambda_n)$，

而 $m_A(A)=0$，　$m_A(A)$ 的特征根全是零，故 $m_A(\lambda_i)=0$

证法三　设 $|\lambda_0E-A|=f(\lambda_0)=\triangle_A(\lambda_0)=0$

$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)q(\lambda)+r$，　$m_A(A)=(A-\lambda_0E)q(A)+rE$，

$rE=-(A-\lambda_0E)q(A)$，两端取行列式 $r^n=0$，　$\therefore r=0$，

即 $(\lambda-\lambda_0)|m_A(\lambda)$，　故 λ_0 为 $m_A(\lambda)$ 的根.

(6)存在正整数 k，使 $\triangle_A(\lambda)|[m_A(\lambda)]^k$

提示：$\because\triangle_A(\lambda)$ 的根是 $m_A(\lambda)$ 的根

例 15　设 φ 为 n 维线性空间 V 的线性变换，$m_\varphi(x)$ 为其最小多项式，$f(x)\in P[x]$，则 $f(\varphi)$ 可逆的充要条件是

$(m_\varphi(x),f(x))=1$

证明　$\Longleftarrow$ 存在 $u(x),v(x)$

使 $m(x)u(x)+f(x)v(x)=1$

$\therefore m_\varphi(\varphi)u(\varphi)+f(\varphi)v(\varphi)=1$　$\because m_\varphi(\varphi)=0$

$\therefore$ 有 $f(\varphi)v(\varphi)=1$　故 $f(\varphi)$ 可逆

$\Longrightarrow$ 设 $(m_\varphi(x),f(x))=r(x)$

$m_\varphi(x)=r(x)\cdot g(x)$，　$f(x)=r(x)h(x)$，

$f(\varphi)=r(\varphi)h(\varphi)$，　$\because f(\varphi)$ 可逆，知 $r(\varphi)$ 可逆

$\therefore m_\varphi(\varphi)=r(\varphi)g(\varphi)=0$，即 $g(\varphi)=0$

$\because\partial(g(x))\leqslant\partial(m_\varphi(x))$

$\therefore$ 必有 $\partial(g(x))=\partial(m_\varphi(x))$，　$\partial(r(x))=0$，于是

$r(x)=1$

例 16　设 W 是矩阵 $A_{n\times n}$ 的多项式的全体所组成的线性空间，则 $\partial(m_A(\lambda))=$ 维数 $W=k$

证明　$\because E,A,A^2,\cdots,A^{k-1}$ 在 P 上线性无关(否则与 $m_A(\lambda)$ 的次数是 k 矛盾)，　$\therefore$ 维 $W\geqslant k$

当 $S\geqslant k$ 时，$\lambda^s=m_A(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$

$r(\lambda)=0$ 或 $\partial(r(\lambda))<k$

$A^s=m_A(A)q(A)+r(A)=r(A)$ 即 A^s 可由 $E,A,\cdots,A^{k-1}$ 线性表示，故 维 $W\leqslant k$

所以，维 $W=k=\partial(m_A(\lambda))$

例 17 设 A 的特征根是实数，求证 A 的所有一阶主子式之和，与所有二阶主子式之和均为零的充要条件是 A 的特征根全为零.

证明 设 $|\lambda E-A|=\triangle_A(\lambda)$

$$=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=\lambda^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k S_k\lambda^{n-k}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\lambda_i\lambda_j$$

$$=(\mathrm{t_r}(A))^2-2S_2=0-0=0$$

$\therefore \lambda_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n$

$$\Longleftarrow \text{若 } \lambda_i=0,\quad \mathrm{t_r}(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=(\mathrm{t_r}(A))^2-2S_2=0-2S_2=0$$

$\therefore S_2=0$

例 18 设 A 为对称阵，A 的所有一阶主子式之和与所有二阶主子式之和为 0，则 $A=0$

证明 由上题知，$\lambda_i=0$，因 A 对称所以存在正交阵 T，使

$$A=T'\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}T=T'OT=0$$

例 19　A 是正交阵，B 是半正定阵，则乘积 AB 的特征根非负.

证明　∵A 是正定阵，则存在可逆阵 P，使 $A=P'P$

故 $AB=P'PB=P'PBP'(P')^{-1}$，即 $AB\sim PBP'$，　而 PBP' 为半正定阵，其特征根非负，　∴AB 的特征根非负

注意：AB 不一定是对称阵，所以不能称为半正定阵

例 20　设 A,B 为实对称阵，则 $t_r(AB)^2\leqslant t_r A^2B^2$ 角阵，

证明　反对称阵酉相似于对角阵，反对称阵的特征值是零或纯虚数. 因此，反对称阵的平方的特征值是非正实数.

$AB-BA$ 是反对称阵 $t_r(AB-BA)^2\leqslant 0$

即，$t_r[(AB)^2+(BA)^2-2ABBA)]\leqslant 0$

故，$t_r 2(AB)^2\leqslant t_r 2AB^2A$，　$t_r(AB)^2\leqslant t_r A^2B^2$

例 21　设 λ 为矩阵 AB 与 BA 的非零特征根，证明 AB 属于 λ 的特征子空间 W_λ 与 BA 属于 λ 的特征子空间 V_λ 的维数相同.

证明　$W_\lambda=\{X\in C^n \mid ABX=\lambda X\}$

$V_\lambda=\{Y\in C^m \mid BAY=\lambda Y\}$

设 $X_1\cdots,X_r$ 为 W_λ 的基底.

$ABX_i=\lambda X_i$，　有 $BABX_i=\lambda BX_i$，　即 $BX_i\in V_\lambda$

若 $\sum\limits_{i=1}^{r}k_iBX_i=0$　则 $A(\sum\limits_{i=1}^{r}k_iBX_i)=0$

即 $\sum\limits_{i=1}^{r}k_iABX_i=\sum\limits_{i=1}^{r}k_i\lambda X_i=0$

则有 $k_i\lambda=0$，∵$\lambda\neq 0$，　$k_i=0$，　$i=1,\cdots,r$，即 $BX_1,\cdots,BX_r$ 线性无关.

故　维 $W_\lambda\leqslant$ 维 V_λ，同理维 $V_\lambda\leqslant$ 维 W_λ，∴维 $V_\lambda=$ 维 W_λ

例 22 若方阵 A 可逆，则 A^{-1}, A^* 均可表示为 A 的多项式.

证明 $\triangle_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+(-1)S_1\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}\lambda+(-1)^n|A|$

$\triangle_A(A)=A^n+(-1)S_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}A+(-1)^n|A|E=0$

$A^n+(-1)S_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}A=(-1)^{n+1}|A|E$

$A(A^{n-1}+(-1)S_1A^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}E)\cdot(-1)^{n-1}\frac{1}{|A|}=E$

$\therefore A^{-1}=(-1)^{n+1}\frac{1}{|A|}[A^{n-1}+(-1)S_1A^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}E]$

又 $\because AA^*=|A|E$

$\therefore A^*=|A|A^{-1}=(-1)^{n+1}(A^{n-1}+(-1)S_1A^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-2}E)$

推论 可逆的循环阵的逆矩阵仍是循环阵.

5. 相似于对角矩阵的条件

A 的不同特征值的特征向量是线性无关的. 一般地，有

命题 设 $\triangle_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}(\lambda-\lambda_2)^{t_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{t_r}$.

特征子空间 V_{λ_i} 的基底为 $\xi_{i1}\cdots,\xi_{is_i}$, $\quad i=1\cdots,r$

则 $\xi_{11}\cdots,\xi_{1s_1},\cdots,\xi_{r1}\cdots,\xi_{rs_r}$ 线性无关(称为特征向量系)

证明 若 $\sum\limits_i\sum\limits_{d_i}k_{id_i}\xi_{id_i}=0$

即有 $\sum\limits_{d_1=1}^{s_1}k_{1d_1}\xi_{1d_1}+\cdots+\sum\limits_{d_r=1}^{S_r}k_{rd_r}\xi_{rd_r}=0$

有$\sum_{d_i} k_{id_i}\xi_{id_i} \in V_{\lambda i}$,必有$\sum_{d_i} k_{id_i}\xi_{id_i}=0$

这是因为不同特征值的特征向量线性无关,

进而有 $k_{id_i}=0$　　(证毕)

推论　$s_1+s_2+\cdots+s_r \leqslant n$

(1)A 相似于对角形矩阵的充要条件是 A 的特征向量系可作成空间 P^n 的基底.(这时,称此特征向量系是完备的)

(2)A 相似于对角阵的充要条件是特征子空间维数之和为 n,即$\sum_{i=1}^{r}$(V_{λ_i}的维数)$=n$,亦即 λ_i 的几何重数(维 V_{λ_i})等于 λ_i 的代数重数(t_i)

(3)A 相似于对角阵的充要条件是 A 的初等因子是一次的.

(4)A 相似于对角阵的充要条件是 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$无重根.

证法一

∵不变因子 $d_n(\lambda)$是全体初等因子的最小公倍式

∴$d_n(\lambda)$无重根,即 $m_A(\lambda)$无重根

证法二　$\Longrightarrow$　设 $P^{-1}AP=D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,

A 的所有不同的特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$,

令 $g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k)$

则 $g(D)=(D-\lambda_1E)(D-\lambda_2E)\cdots(D-\lambda_kE)=0$

∵$g(D)=g(P^{-1}AP)=P^{-1}g(A)P$,　∴$g(A)=0$

从而,$m_A(\lambda)\mid g(\lambda)$,所以 $m_A(\lambda)$无重根

$\Longleftarrow$　可设 $m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_k)$,

$m_A(A)=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_kE)=0$

设秩$(A-\lambda_i E)=r_i$

由第四章例15知$r_1+r_2+\cdots+r_k\leqslant(k-1)n$

即$(n-r_1)+(n-r_2)+\cdots+(n-r_k)\geqslant n$

$n-r_i$是齐次方程组$(\lambda_i E-A)X=0$的基础解系中所含向量的个数，亦即特征子空间V_{λ_i}的维数.

由前面的命题，A的线性无关的特征向量系可以作成P^n的基底，因而A相似于对角阵.

(5)A相似于对角阵的充要条件是对于A的任意特征根λ_i，均有秩$(\lambda_i E-A)=$秩$(\lambda_i E-A)^2$

证明 A相似于对角阵$\Longleftrightarrow m_A(\lambda)$无重根

先证必要性：$m_A(\lambda)$无重根

$(\lambda-\lambda_i)\mid m_A(\lambda)$且$(m_A(\lambda),(\lambda-\lambda_i)^2)=(\lambda-\lambda_i)$

故存在$\mu(\lambda),\upsilon(\lambda)$使$m_A(\lambda)\mu(\lambda)+(\lambda-\lambda_i)^2\upsilon(\lambda)=\lambda-\lambda_i$

λ代A得$(A-\lambda_i E)^2\upsilon(A)=A-\lambda_i E$

$\therefore$秩$(A-\lambda_i E)\leqslant$秩$(A-\lambda_i E)^2$

但秩$(A-\lambda_i E)^2\leqslant$秩$(A-\lambda_i E)$

$\therefore$秩$(A-\lambda_i E)=$秩$(A-\lambda_i E)^2$

下面证明充分性，我们证明$m_A(\lambda)$无重根，否则设A的特征根λ_0不是$m_A(\lambda)$的单根，则$(\lambda-\lambda_0)^2\mid m_A(\lambda)$

有$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^2q(\lambda)$

$\because$ $\partial((\lambda-\lambda_0)q(\lambda)),\partial(q(\lambda))$均小于$\partial(m_A(\lambda))$

$\therefore$ $(A-\lambda_0 E)q(A)\neq 0,q(A)\neq 0$，($\because m_A(\lambda)$是最小多项式)

但$(A-\lambda.E)^2q(A)=m_A(A)=0$，$\because q(A)\neq 0$

$\therefore$ 矩阵$q(A)$中必有不为0的列向量是齐次方程组$(A-\lambda_0 E)^2X=0$的一个非零解. 而不是$(A-\lambda_0 E)X=0$

的解，但与秩$(A-\lambda_0E)=$秩$(A-\lambda_0E)^2$

因而方程组$(A-\lambda_0E)X=0$与$(A-\lambda_0E)^2X=0$同解，矛盾.

$\therefore \lambda_0$ 是 $m_A(\lambda)$的单根，$m_A(\lambda)$无重根

推论 A 相似于对角阵的充要条件是对于 A 的任意特征根 λ_i，(λ_iE-A)与$(\lambda_iE-A)^2$ 的值域相等，或者它们的核相等.

(6)设$\triangle_A(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，则 A 相似于对角阵的充要条件是特征子空间 V_{λ_i}与$(\lambda_iE-A)^{r_i}$的核空间的维数相等，$i=1,2,\cdots,s$ （后面证）

例 23 方阵 A 适合 $A^3+2A^2-A-2E=0$，问 A 是否相似于对角阵

解 $\because g(\lambda)=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$无重根，$g(A)=0$，$m_A(\lambda)|g(\lambda)$，$m_A(\lambda)$无重根，$\therefore A$ 相似于对角阵

例 24 幂幺阵相似于对角阵

证明 $A^k=E$，设 λ_i 为 A 的特征值，则 λ_i^k 为 A^k 的特征值有 $\lambda_i^k=1$，λ_i 为 k 次单位根

令 $g(x)=x^k-1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_k)$.

ε_i 为 k 次单位根

$g(A)=A^k-E=0$，$m_A(\lambda)|g(\lambda)$，$m_A(\lambda)$无重根

因此，A 相似于对角阵.

例 25 设 φ,ψ 为数域 P 上 n 维线性空间 V 的两个线性变换，且$(\triangle_\varphi(\lambda),\triangle'_\varphi(\lambda))=1$，($\triangle'_\varphi(\lambda)$为$\triangle_\varphi(\lambda)$的导数多项式)，则 $\varphi\psi=\psi\varphi \Longleftrightarrow (m_\psi(\lambda),m'_\psi(\lambda))=1$

证明 设 φ、ψ 在 V 的基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A 与 B，

由$(\triangle_A(\lambda),\triangle'_A(\lambda))=1$

知$\triangle_A(\lambda)$无重根，A相似于对角矩阵有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}=A_1,\quad \lambda_i\neq\lambda_j$$

令 $P^{-1}BP=B_1$

$\varphi\psi=\psi\varphi\Longleftrightarrow AB=BA\Longleftrightarrow A_1B_1=B_1A_1\Longleftrightarrow B_1$ 为对角阵$\Longleftrightarrow$ $m_B(\lambda)$无重根，$\Longleftrightarrow(m_B(\lambda),m'_B(\lambda))=1$

$\Longleftrightarrow(m_\psi(\lambda),m'_\psi(\lambda))=1$

例 26 一组两两可交换的方阵，它们都相似于对角阵，求证：它们可以同时相似于对角阵

证明 对方阵的阶数 n 用归纳法证

设方阵 $A,B_1,B_2,\cdots,B_s$ 都相似于对角阵，且两两可换，

当 $n=1$ 时，显然成立

假定命题对阶数不超过 $n-1$ 时成立，现对 n 证，设 A 的不同特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\lambda_i$ 的重数为 r_i，则存在非奇异阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_kE_{r_k}\end{pmatrix}=C$$

记为 $P^{-1}B_jP=D_j$

$\because AB_j=B_jA.\ \therefore CD_j=D_jC$，故 D_j 为对角块阵

$$D_j=\begin{pmatrix}D_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & D_{jk}\end{pmatrix},\quad D_j \text{ 的阶数为 } r_i$$

$\because D_j$ 相似于对角阵；　$\therefore D_{ji}$亦相似于对角阵

另一方面$\because B_hB_t=B_tB_h$　$\therefore D_nD_t=D_tD_n$

$D_{n_i}D_{t_i}=D_{t_i}D_{n_i}$，　D_{n_i}, D_{ti} 的阶数小于或等于 $n-1$，由归纳假定，对每个 i，有非奇异阵 Q_i，使 $Q_i^{-1}D_{ji}Q_i=M_{ji}$同时成对角阵，记

$$G=P\begin{bmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_k \end{bmatrix}=PQ$$

则 $G^{-1}B_jG=Q^{-1}P^{-1}B_jPQ=Q^{-1}D_jQ$

$$=\begin{pmatrix} Q_1^{-1}D_{j1}Q & & \\ & \ddots & \\ & & Q_k^{-1}D_{jk}Q_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & M_{jk} \end{pmatrix}$$

$$G^{-1}AG=Q^{-1}P^{-1}APQ=Q^{-1}CQ=C$$

例 27　设 A、B 为 n 阶实方阵，$A^2=A$，$B^2=B$，$AB=BA$

求证　可逆阵 G 使 $G^{-1}AG$ 与 $G^{-1}BG$ 均为对角阵.

证明　可利用上例直接得出，亦可证明如下：

由 $A^2=A$，知存在可逆阵 P 使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=C,\quad \text{秩 } A=r$$

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix} M_{r\times r} & N \\ R & S \end{pmatrix}=D$$

$$CD=P^{-1}APP^{-1}BP=DC$$

$$CD=\begin{pmatrix} M & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=DC=\begin{pmatrix} M & 0 \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

$$\therefore N=0, R=0,\quad \therefore D=\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

$$D^2=\begin{pmatrix} M^2 & 0 \\ 0 & S^2 \end{pmatrix}=D,\quad M^2=M,\quad S^2=S$$

则存在 Q_1,Q_2，使 $Q_1^{-1}MQ_1=\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q_2^{-1}SQ_2=\begin{pmatrix} E_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}，令\quad Q=\begin{pmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{pmatrix}$$

有 $Q^{-1}DQ=\begin{bmatrix} E_k & & & \\ & 0 & & \\ & & E_t & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，$Q^{-1}CQ=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

取 $G=PQ$，则有

$$G^{-1}AG=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad G^{-1}BG=\begin{bmatrix} E_k & & & \\ & 0 & & \\ & & E_t & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

例 28 设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i\neq 0$

(1)证明：若 $B=\alpha'\alpha$，则 $B^k=mB$ （k 为自然数）

(2)求可逆阵 P 使 $P^{-1}BP$ 为对角阵

证明 (1)$B^k=(\alpha'\alpha)(\alpha'\alpha)\cdots(\alpha'\alpha)=\alpha'(\alpha\alpha')(\alpha\alpha')\cdots$

$(\alpha\alpha')\alpha=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)^{k-1}\alpha'\alpha=mB$，其中 $m=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)^{k-1}$

(2)∵B 的 t 阶($t\geqslant 2$)子式均为 0

$$\mathrm{tr}B=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

∴B 的特征值为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$ 及 0

$\beta_1=(a_1,\cdots,a_n)'$ 为属于特征值 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$ 的特征向量

$\beta_2=(-a_2,a_1,0,\cdots 0)'$

$\beta_3=(-a_2,0,a_1,0\cdots 0)'$

…………………………

$\beta_n=(-a_2,0\cdots 0,a_1)'$

是 B 的属于特征值零的特征向量

令 $P=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，有 $|P|\neq 0$.

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

四、方阵 A 相似于准对角矩阵、值域、核、不变子空间、值域与核的和是直和的条件

1. 不变子空间的定义

设 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$，$W$ 是 V 的子空间，若 $\varphi(W)\subseteq W$，称 W 为 φ 的不变子空间. 记为 φ——W

2. 不变子空间、值域、核的若干性质

(1)设子空间 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$

则 φ——$W\Longleftrightarrow\varphi(\alpha_i)\in W$.　$i=1,2,\cdots,s$.

(2)设 $\varphi\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$，则 φ——$\varphi(V)$，　φ——$\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(3)若 V 为 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的基底，且 $\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$，则 $\varphi(V)=L(\varphi(\varepsilon_1),\cdots,\varphi(\varepsilon_n))$，

且维数 $\varphi(V)=$ 秩 A

(4)设 φ 是 n 维空间 V 的线性变换，则

φ的秩+φ的零度$=n$

(5)若 φ—W,ψ—W,则 $\varphi+\psi$—W, $\varphi\psi$—W

(6)若 φ—W,φ—N,则 φ—$W+N$, φ—$W\cap N$

(7)若 φ—W,且 φ 可逆,则 φ^{-1}—W, φ—$\varphi(W)$

证明 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 W 的基,因 φ 可逆,则

$\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n)$亦为 W 的基, $\beta\in W$,

$\beta=\sum k_i\varphi(\varepsilon_i)=\varphi(\sum k_i\varepsilon_i)$, $\varphi^{-1}(\beta)=\sum k_i\varepsilon_i\in W$.

故 φ^{-1}—W,至于 φ—$\varphi(W)$ 显然

(8)若 $\varphi\psi=\psi\varphi$,则 φ—$\psi(V)$, φ—$\mathrm{Ker}(\psi)$

(9)φ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 $V_{\lambda 0}$ 是 φ—$V\lambda_0$,

并且若 $\varphi\psi=\psi\varphi$,则有 ψ—$V_{\lambda 0}$

证明 $\alpha\in V_{\lambda 0}$, $\varphi\psi(\alpha)=\psi\varphi(\alpha)=\psi\lambda_0\alpha)=\lambda_0\psi(\alpha)$,

$\psi(\alpha)\in V_{\lambda 0}$

(10)φ 的属于特征值 λ_0 的特征子空间 $V_{\lambda 0}$.,则

$V\lambda_0=\mathrm{Ker}(\lambda_0 E-\varphi)$.

(11)若 φ—W, $f(\lambda)\in P[x]$则 $f(\varphi)$——W,

φ—$\mathrm{Ker}(f(\varphi))$

(12)$\{0\}\subseteq\mathrm{Ker}(\varphi)\subseteq\mathrm{Ker}(\varphi^2)\subseteq\mathrm{Ker}(\varphi^3)\subseteq\cdots$

$V\supseteq\mathrm{Im}(\varphi)\supseteq\mathrm{Im}(\varphi^2)\supseteq\mathrm{Im}(\varphi^3)\supseteq\cdots$

且当 V 是有限维空间时,存在自然数 t,s, 使

$\mathrm{Ker}(\varphi^t)=\mathrm{Ker}(\varphi^{t+1})=\mathrm{Ker}(\varphi^{t+2})=\cdots$

$\mathrm{Im}(\varphi^s)=\mathrm{Im}(\varphi^{s+1})=\mathrm{Im}(\varphi^{s+2})=\cdots$

(13)复数域上空间 C^n 的任意两两可交换的线性变换集有共同的特征向量.

证明 对空间的维数 n 用归纳法

当 $n=1$ 时,$C^n=L(\alpha)$,则 α 为 C^n 的任意线性变换的特征向量.

假定命题对 $n-1$ 成立,今对 n 证

若 C^n 中每个非零向量均为所给线性变换的特征向量,则命题成立,否则,C^n 中至少有一个向量 $\alpha\neq 0$ 不是某给定线性变换 φ 的特征向量. 但存在 φ 的特征子空间 V_λ, $V_\lambda\subset C^n$,

$V_\lambda\neq C^n$,维数 $V_\lambda\leqslant n-1$,V_λ 是所给线性变换的不变子空间,给定的线性变换在 V_λ 中的导出变换有共同的特征向量(由归纳假定),这也就是所给的线性变换在 C^n 中有公共的特征向量.

3. 在有限维空间 V 中,关于已知线性变换 φ,求 φ 的值域,与已知值域,求线性变换的问题

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为线性空间 V 的基底, $\alpha\in V$,

有 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$,则

$\varphi(\alpha)=k_1\varphi(\alpha_1)+\cdots+k_n\varphi(\alpha_n)$.

因此,φ 的值域:

$\mathrm{Im}\varphi=\varphi(V)=L(\varphi(\alpha_1),\cdots,\varphi(\alpha_n))$

反过来,若已知 $\varphi(V)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$, 则在 $\varphi(V)$ 中存在向量 $\beta_{m+1},\cdots,\beta_n$,它们均可由 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示,使 $\varphi(V)=L(\beta_1,\cdots,\beta_m)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m,\cdots,\beta_n)$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的基底,则存在线性变换 φ,

使 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 且 $\varphi(V)=L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$

因为 $\beta_{m+1},\cdots,\beta_n$ 在 $\varphi(V)$ 中的存在是不唯一的,则 φ 的存在亦不是唯一的.

4. 在有限维线性空间 V 中，关于已知线性变换 φ，求 φ 的核，$\varphi^{-1}(0)=\text{Ker}\,\varphi$ 与已知核空间，而去求线性变换的问题

一方面，设 $\alpha_1,\alpha_2,,\alpha_n$ 为 V 的基底.

$\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$

齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$

令 $\beta_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi_i$，　则 $\text{Ker}(\varphi)=L(\beta_1,\cdots,\beta_{n-r})$

事实上，$\varphi(\beta_i)=\varphi[(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi_i]=\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi_i$
$=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A\xi_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\cdot 0=0$

又若 $\gamma\in V$，　$\varphi(\gamma)=0$，　$\gamma=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi$
$\varphi(\gamma)=\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A\xi=0$，　$\because A\zeta=0$，

$\therefore$　ξ 可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示.

$\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

则有 $\gamma=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})$

$$=k_1(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi_1+\cdots+k_{n-r}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\xi_{n-r}$$

$$=k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_{n-r}\beta_{n-r}$$

即 $\gamma\in L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r})$

另一方面，就是反过来，已知线性变换 φ 的核

$\text{Ker}(\varphi)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

$$(\beta_1,\cdots,\beta_t)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\xi_{11} & \cdots & \xi_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nt}\end{pmatrix}$$

通过解齐次线性方程组 $\begin{pmatrix}\xi_{11} & \cdots & \xi_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \xi_{1t} & \cdots & \xi_{nt}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ 的方法，可求得 n 阶矩阵 $A'=(a_{ji})$，使得

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{1t} & \cdots & \xi_{nt} \end{pmatrix} A' = 0_{t\times n}$$

得到向量组$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$

则线性变换 φ: $\varphi(\alpha_i)=\gamma_i$, $i=1,2,\cdots,n$,为所求

事实上,$\gamma\in \mathrm{Ker}(\varphi)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$

$\gamma=k_1\beta_1+\cdots+k_t\beta_t$

$$\varphi(\gamma)=\varphi(\beta_1,\cdots,\beta_t)\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$=\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A\begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)0\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_t \end{pmatrix}=0$$

一般说来,因为 A' 是不唯一的,所以,求得的 φ 亦不唯一.

例 29 设 n 阶方阵 A,B,且 $AB=BA$,则 B 的任意特征子空间中,都有 A 的特征向量. 反之,A 的任意特征子空间中都有 B 的特征向量.

证明 设 V_1 是 B 的特征值 λ 对应的特征子空间 V_1 的基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$,$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$,则有 $A-V_1$

$$A\alpha_i=\sum_{j=1}^{r}C_{ij}\alpha_j$$

若 $\beta\in V_1$, $\beta=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i$,使 $A\beta=\mu\beta$

即 $\sum_{i=1}^{r} k_i A\alpha_i = \mu \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i$

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \sum_{j=1}^{r} C_{ij}\alpha_j = \mu \sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i$$

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} k_i C_{ij} - \mu k_j\right)\alpha_j = 0$$

$\because \alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 线性无关

$$\therefore \sum_{i=1}^{r} k_i C_{ij} - \mu k_j = 0, \quad (j=1,2,\cdots,r)$$

写成矩阵的形式为

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{r1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1r} & C_{2r} & \cdots & C_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix}$$

即 $(k_1 \cdots, k_r)^T$ 是矩阵 $C=(C_{ji})$ 的特征向量，故是存在的，因而 β 存在.

5. **方阵相似于准对角阵**

命题 1 设 $\varphi \in \mathrm{Hom}_p(V,V)$，$V$ 为 n 维线性空间. 则存在 V 的基底，使 φ 对应的矩阵是准对角形

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \quad (A_i \text{ 是 } r_i \text{ 阶方阵}, r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n)$$

的充分必要条件是存在 φ 的不变子空间 $W_1, W_2, \cdots, W_s$，使

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s, \quad (W_i \text{ 的维数是 } \gamma_i)$$

证明 $\Longrightarrow$ 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 V 的基.

且 $\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$

让 A 的列向量自左而右分别与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中的向量相对应，令 A_i 在 A 中的列向量所对应的基底中的向量生成的子空间为 W_i. 则 W_i 是 φ 的不变子空间. 且有

$V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$

$\Longleftarrow$ 若 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s$，且 $\varphi-W_i$

则将 W_i 的基底 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 合起来做成 V 的基底.

φ 在此基底下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$$ ，这里，A_i 是 r_i 阶方阵.

下面我们将证明复数域 C 上任意一个 n 阶方阵均相似于某个准对角形矩阵. 为此，须要：

引理 1 设 φ 是线性空间 V 的线性变换. 在 $P[x]$ 中有

$f(x)=q(x)s(x)$，且 $(q(x),s(x))=1$

求证：$\mathrm{Ker}(f(\varphi))=\mathrm{Ker}(q(\varphi))\oplus\mathrm{Ker}(s(\varphi))$

证明 $\because (q(x),s(x))=1$，

则存在 $u(x)$， $v(x)$， 使 $q(x)u(x)+s(x)v(x)=1$

代入 φ 得：$q(\varphi)u(\varphi)+s(\varphi)v(\varphi)=E$ (1)

$\forall\ \alpha\in\mathrm{Ker}(f(\varphi))$，有 $\alpha=E(\alpha)=q(\varphi)u(\varphi)(\alpha)+s(\varphi)v(\varphi)(\alpha)$

$s(\varphi)[q(\varphi)u(\varphi)(\alpha)]=f(\varphi)u(\varphi)(\alpha)=u(\varphi)f(\varphi)(\alpha)=0$，

$\therefore q(\varphi)u(\varphi)(\alpha)\in\mathrm{Ker}(s(\varphi))$

$q(\varphi)[s(\varphi)v(\varphi)(\alpha)]=f(\varphi)v(\varphi)(\alpha)=v(\varphi)f(\varphi)(\alpha)=0,$

$\therefore s(\varphi)v(\varphi)(\alpha)\in \mathrm{Ker}(q(\varphi))$

故，$\mathrm{Ker}(f(\varphi))=\mathrm{Ker}(q(\varphi))+\mathrm{Ker}(s(\varphi))$

又，$\forall\ \alpha\in \mathrm{Ker}(q(\varphi))\cap \mathrm{Ker}(s(\varphi))$

用(1)式两端作用于 α，得

$E(\alpha)=\alpha=q(\varphi)u(\varphi)\alpha+s(\varphi)v(\varphi)(\alpha)=0+0=0$

$\therefore \mathrm{Ker}(f(\varphi))=\mathrm{Ker}(q(\varphi))\oplus \mathrm{Ker}(s(\varphi))$

推论 1　当 $f(x)$ 为 φ 的零化多项式(即 $f(\varphi)=0$)则有，$V=\mathrm{Ker}(q(\varphi))+\mathrm{Ker}(s(\varphi))$

并且有，　$\mathrm{Im}\ q(\varphi)=\mathrm{Ker}\ s(\varphi)$，　$\mathrm{Im}\ s(\varphi)=\mathrm{Ker}\ q(\varphi)$

证明　若 $\alpha\in \mathrm{Im}\ q(\varphi)$，存在 $\xi\in V$，　$q(\varphi)\xi=\alpha$，

则 $s(\varphi)\alpha=s(\varphi)q(\varphi)\xi=f(\varphi)\xi=0$，即有 $\alpha\in \mathrm{Ker}\ s(\varphi)$. 反之，若 $\beta\in \mathrm{Ker}\ s(\varphi)$，有 $s(\varphi)\beta=0$，用(1)式两端作用 β 得，

$\beta=q(\varphi)u(\varphi)\beta+s(\varphi)v(\varphi)\beta=q(\varphi)[u(\varphi)\beta]\in \mathrm{Im}\ q(\varphi)$

因此，$\mathrm{Im}\ q(\varphi)=\mathrm{Ker}\ s(\varphi)$，同理，$\mathrm{Im}\ s(\varphi)=\mathrm{Ker}\ q(\varphi)$

推论 2　当 $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_t(x)$. 且因子两两互素，则有 $\mathrm{Ker}f(\varphi)=\mathrm{Ker}f_1(\varphi)\oplus\cdots\oplus \mathrm{Ker}f_t(\varphi)$

命题 2　设 φ 是 n 维空间 V 的线性变换，φ 的特征多项式为 $\triangle_\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，$i\neq j$ 时，$\lambda_i\neq\lambda_j$

记　$\mathrm{Ker}(\lambda_iE-\varphi)^{r_i}=V_i$，则 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$　且令 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 为 V_i 的基，将这些基合起来为 V 的基，φ 在此基下的矩阵是准对角形的.

证明　$\because (\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ 两两互素，

由前面引理的注有：

$\mathrm{Ker}\triangle_\varphi(\varphi)=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1E_1)^{r_1}\oplus\cdots\oplus \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_sE_s)^{r_s}$

但，$\mathrm{Ker}\triangle_\varphi(\varphi)=\mathrm{Ker}(0)=V$，　$\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_iE_i)^{r_i}=V_i$

V_i 的维数为 r_i(参看第八章例 15 的推论 2)

$\because \varphi(\varphi-\lambda_i E_i)^{r_i}=(\varphi-\lambda_i E_i)^{r_i}\varphi$,

$\therefore \varphi-V_i$,故可证得

推论 任意 n 阶方阵均相似于准对角阵($\because A$ 可看成 C^n 的线性变换)

例 30 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换,φ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A,

$\triangle_\varphi(\lambda)=\triangle_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}\quad \lambda_i\neq\lambda_j$

求证:(1)$\mathrm{Ker}(\lambda_i E-\varphi)\subseteq\mathrm{Ker}(\lambda_i E-\varphi)^{r_i}$

(2)A 相似于对角阵$\Longleftrightarrow$维数 V_{λ_i}=维数 $\mathrm{Ker}(\lambda_j E-\varphi)^{r_i}$

(3)$V_{\lambda_i}\cap V_{\lambda_j}=\{0\}$, $i\neq j$ 时

证明 (1)$\forall\ \alpha\in\mathrm{Ker}(\lambda_i E-\varphi)$, $(\lambda_i E-\varphi)\alpha=0$,

$\therefore (\lambda_i E-\varphi)^{r_i}\alpha=0$

有 $\alpha\in\mathrm{Ker}(\lambda_i E-\varphi)^{r_i}$,故 $\mathrm{Ker}(\lambda_i E-\varphi)\subseteq Ker(\lambda_i E-\varphi)^{r_i}$

(2)$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$, $V_i=\mathrm{Ker}(\lambda_i E-\varphi)^{r_i}$

但 A 相似于对角阵$\Longleftrightarrow V=V_{\lambda_1}\oplus v_{\lambda 2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

$\Longleftrightarrow$维数 $V_{\lambda i}$=维数 V_i

(3)$\forall\ \alpha\in V_{\lambda_i}\cap V_{\lambda_j}$,则$(\lambda_i E-\varphi)\alpha=0$ 即 $\varphi(\alpha)=\lambda_i\alpha$

同理 $\varphi(\alpha)=\lambda_j\alpha$, $(\lambda_i-\lambda_j)\alpha=0$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ 必有 $\alpha=0$,故 $V_{\lambda_i}\cap V_{\lambda_j}=\{0\}$,($V_{\lambda_i}$是 λ_i 的特征子空间)

命题 3 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换,则下列条件等价:

(1)$V=\mathrm{Im}(\varphi)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi)$

(2)$\mathrm{Im}(\varphi)\cap\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$

(3)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 $\mathrm{Im}(\varphi)$的基,则 $\varphi(\alpha_1)\cdots,\varphi(\alpha_r)$是

$\mathrm{Im}(\varphi^2)$的基，进而 $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Im}(\varphi^2)$

(4)秩 $\varphi^2=$秩 φ

(5)φ的零特征值的几何重复度和代数重复度相等.

证明 (1)∵φ的秩$+\varphi$的零度$=$维数 $\mathrm{Im}(\varphi)$ $+$维数 $\mathrm{Ker}(\varphi)=n$

∴$V=\mathrm{Im}(\varphi)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi)\Longleftrightarrow\mathrm{Im}(\varphi)\cap\mathrm{Ker}(\varphi)=\{0\}$

(2)$\Longrightarrow$(3)$\mathrm{Im}(\varphi)=\varphi(V)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

$\mathrm{Im}(\varphi^2)=\varphi^2(V)=\varphi[\varphi(V)]=L(\varphi(\alpha_1),\cdots,\varphi(\alpha_r))$

若有，$k_1\varphi(\alpha_1)+k_2\varphi(\alpha_2)+\cdots+k_r\varphi(\alpha_r)=0$

即 $\varphi(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=0$

因而，$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)\in\mathrm{Ker}(\varphi)$

进而，$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)\in\mathrm{Im}(\varphi)\cap\mathrm{Ker}(\varphi)$

由(2)，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

又因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，

所以，$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

因此，$\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2)\cdots,\varphi(\alpha_r)$线性无关.

$\mathrm{Im}(\varphi)$的维数等于 $\mathrm{Im}(\varphi^2)$的维数，

但，由不变子空间的性质 12，$\mathrm{Im}(\varphi)\supseteq\mathrm{Im}(\varphi^2)$，

故，$\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Im}(\varphi^2)$.

(3)$\Longrightarrow$(2)：$\mathrm{Im}(\varphi)=\varphi(V)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，其维数是 r，若有 $\gamma\in\mathrm{Im}(\varphi)\cap\mathrm{Ker}(\varphi)$， $\gamma=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$，且有 $\varphi(\gamma)=k_1\varphi(\alpha_1)+k_2\varphi(\alpha_2)+\cdots+k_r\varphi(\alpha_r)=0$

因 $\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_r)$线性无关，则 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$

故 $\gamma=0$，因此，(2)与(3)等价.

因为 $\mathrm{Im}(\varphi)\supseteq\mathrm{I_m}(\varphi^2)$，所以 $\mathrm{Im}(\varphi)=\mathrm{Im}(\varphi^2)$的充分必要条件是 $\mathrm{Im}(\varphi)$的维数等于 $\mathrm{Im}(\varphi^2)$的维数，亦即；φ的秩等于 φ^2 的

秩. 此即(3)与(4)等价.

(4)$\Longleftrightarrow$(5):存在 φ 的若当标准矩阵 J,

秩 φ= 秩 J,可设 $J=\begin{pmatrix} B & \\ & C\end{pmatrix}$,其中 B 仅含 J 的全部特征值为零的若当块.

则　秩 φ= 秩 $\varphi^2 \Longleftrightarrow$ 秩 J= 秩 $J^2 \Longleftrightarrow$ 秩 B= 秩 B^2.
($\because$ 秩 C= 秩 C^2)$\Longleftrightarrow B=0$(可用反证法证明)

此即特征值零的几何重复度等于其代数重复度.

推论 1　$\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Ker}(\varphi)$是直和的充要条件是 φ 的零特征值的代数重复度等于 $n-$秩 φ.

推论 2　当 φ 可逆时,$\mathrm{Im}(\varphi)+\mathrm{Ker}(\varphi)$是直和.

例 31　n 维线性空间 V 的线性变换 φ 的特征向量可以作成 V 的基底,求证 φ 的任一不变子空间 W 的基底可由 φ 的特征向量组成.

证法一　设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 为 φ 的互不相同的特征值

则 $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_k}$

$W\cap V_{\lambda_1}+W\cap V_{\lambda_2}+\cdots+W\cap V_{\lambda_k}$是直和且属于 W

又　$\forall\ \alpha\in W$,有 $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_k\quad \alpha_i\in V_{\lambda_i}$

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha_1)+\varphi(\alpha_2)+\cdots+\varphi(\alpha_k)$$
$$=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k\in W$$

令 $g(x)=(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\cdots(\lambda-\lambda_k)$

$$g(\varphi)\alpha=[\prod_{i=2}^{k}(\varphi-\lambda_iE)]\alpha\in W$$

即是,$[\prod_{i=2}^{k}(\varphi-\lambda_iE)]\alpha_1\in W$,即是$[\prod_{i=1}^{k}(\lambda_1-\lambda_i)]\alpha_1\in W$,　故有 $\alpha_1\in W$

因此 $\alpha_1 \in W \cap V_{\lambda_1}$，同理，$\alpha_i \in W \cap V_{\lambda_i}$，　$i=2,3,\cdots,k$

所以 $W = W \cap V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W \cap V_{\lambda_k}$

从而 W 的基可由 φ 的特征向量组成.

证法二　$V \cap W = W = V_{\lambda_1} \cap W + V_{\lambda_2} \cap W + \cdots + V_{\lambda_k} \cap W$.

例 32　设 V 为实数域上 n 维线性空间，$\alpha \in V$，　$\alpha \neq 0$，φ 为 V 的线性变换，则 $V_1 = L(\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \cdots,)$ 是 φ 的不变子空间，若维 $V_1 = r$，则 $\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{r-1}(\alpha)$ 为 V_1 的基，并求 φ 在此基下矩阵.

证明　$\because \alpha \neq 0$，故必存在 $k \leqslant n$ 使

$\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha) \cdots, \varphi^{k-1}(\alpha)$ 线性无关

$\varphi^k(\alpha) \in L(\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{k-1}(\alpha)) = V_2$

$\varphi^{k+1}(\alpha) = \varphi(\varphi^k(\alpha)) = \varphi(a_1\alpha + a_2\varphi(\alpha) + \cdots + a_k\varphi^{k-1}(\alpha))$

$= a_1\varphi(\alpha) + a_2\varphi^2(\alpha) + \cdots + a_k\varphi^k(\alpha) \in V_2$

同理，$\varphi^{k+2}(\alpha).\ \varphi^{k+3}(\alpha), \cdots, \in V_2$

所以 $V_2 = V_1$，维 $V_2 =$ 维 $V_1 = r = k$

因此 $\varphi - V_1$，　$\alpha, \varphi(\alpha), \cdots, \varphi^{k-1}(\alpha)$ 是基底.

φ 在此基下的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & & & a_1 \\ 1 & 0 & & a_2 \\ & 1 & \ddots \ 0 & \vdots \\ & & \ddots \ 1 & a_k \end{pmatrix}$$

例 33　设 φ 为 n 维空间 V 的线性变换，φ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵是对角形的，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 为 φ 的全部不同的特征值，则存在线性变换 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s$. 使

① $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_s = E$

② $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_s\varphi_s$

③$\varphi_i\varphi_j=0(i\neq j)$

④$\varphi_i^2=\varphi_i$

⑤$\varphi_i(V)=V_{\lambda_i}$

证明 由题设有 $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

$\forall\ \alpha\in V$，均有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$， $\alpha_i\in V_{\lambda i}$

令 $\varphi_i(\alpha)=\alpha_i$，可以证明 φ_i 是 V 的线性变换

①$(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_s)\alpha=\varphi_1(\alpha)+\cdots+\varphi_s(\alpha)$

$=\alpha_1+\cdots+\alpha_s=\alpha=E(\alpha)$

$\therefore\varphi_1+\cdots+\varphi_s=E$

②$\varphi(\alpha)=\varphi(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=\varphi(\alpha_1)+\cdots+\varphi(\alpha_s)$

$=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s$

$=\lambda_1\varphi_1(\alpha)+\lambda_2\varphi_2(\alpha)+\cdots+\lambda_s\varphi_s(\alpha)$

$=(\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_s\varphi_s)(\alpha)$

$\therefore\varphi=\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_s\varphi_s$

③$\varphi_i\varphi_j(\alpha)=\varphi_i(\alpha_j)=0$， $\therefore\varphi_i\varphi_j=0\quad(i\neq j)$

④$\varphi_i^2(\alpha)=\varphi_i\varphi_i(\alpha)=\varphi_i(\alpha_i)=\alpha_i=\varphi_i(\alpha)\quad\therefore\varphi_i^2=\varphi_i$

⑤$\alpha\in\varphi_i(V)$，存在 $\beta\in V$，使 $\alpha=\varphi_i(\beta)$

由 φ_i 的定义，知 $\varphi_i(\beta)\in V_{\lambda i}$，故 $\varphi_i(V)\subseteq V_{\lambda_i}$ 又若 $\beta\in V_{\lambda_i}$，

则 $\varphi_i(\beta)=\beta$，即 $\beta\in\varphi_i(V)$， 故 $V_{\lambda_i}\subseteq\varphi_i(V)$，因此

$\varphi_i(V)=V_{\lambda_i}$.

又 因 $\mathrm{Hom}_P(V,V)\cong P^{n\times n}$，则可以用矩阵的方法来解此题.

设 φ 在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A，A 相似于对角阵，即存在非奇异阵 P，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & & \\ & \lambda_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}$$

$$=\lambda_1\begin{pmatrix}E_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\cdots+\lambda_s\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & E_s\end{pmatrix}$$

令 $B_i=P\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & E_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$

则 $A=\lambda_1B_1+\lambda_2B_2+\cdots+\lambda_sB_s$

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots,\varepsilon_n)B_i=(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in})$

令 $\varphi_i(\varepsilon_j)=\alpha_{ij}$, $i=1,2,\cdots,s$, $j=1,2,\cdots,n$

可以证明线性变换 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s$ 满足题目要求的五个条件.

例 34 设 φ 是复数域 C 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则必存在 V 的基，使得 φ 关于这个基的矩阵是上三角阵.

证明 对 n 用归纳法

当 $n=1$ 时，显然成立，假定对 $n-1$ 维空间命题成立，今对 n 证.

φ 是复数域上的线性变换，则存在 φ 的特征值 λ_1 与特征向量 α_1，有 $\varphi(\alpha_1)=\lambda_1\alpha_1$

$L(\alpha_1)$ 是 φ 的一维不变子空间，将 α_1 扩成 V 的基

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 $V=L(\alpha_1)\oplus L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

$n-1$ 阶阵 A_1，定义 $L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 中线性变换 φ_1，

$$\varphi_1(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A_1$$

由归纳假定，存在 $L(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的基 $\beta_2,\cdots,\beta_n$，使 φ_1 关于这个基的矩阵为

$$B_1=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

令 $(\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_n)=(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)P_1$

$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$，有 $(\alpha_2,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$

φ 在基 $\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的矩阵为

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & *\\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

事实上：

$$\varphi(\alpha_1,\beta_2,\cdots\beta_n)=(\varphi(\alpha_1),\varphi(\beta_2,\cdots,\beta_n)$$

$$=(\varphi(\alpha_1),\varphi[(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P_1])$$

$$=(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P_1)=(\varphi(\alpha_1),\varphi(\alpha_2),\cdots,\varphi(\alpha_n))\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,(\alpha_2,\cdots,\alpha_n))\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta\\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,(\beta_2,\cdots,\beta_n)P_1^{-1})\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta \\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta \\ 0 & A_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & P_1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & \beta P_1 \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & * & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

例 35　证明 $C^{n\times n}$ 中两可交换矩阵 A 与 B 可以同时相似于上三角阵

证明　A 与 B 可看作空间 C^n 的线性变换，A 与 B 有共同的特征向量 α_1，

$$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\quad B\alpha_1=\mu_1\alpha_1$$

将 α_1 扩充成 C^n 的基底：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 则

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

$$B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\mu_1 & * \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$$

由 $AB=BA$ 知 $A_1B_1=B_1A_1$

用归纳法知存在 $n-1$ 阶非奇异阵 Q 使

$$Q^{-1}A_1Q=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad Q^{-1}B_1Q=\begin{bmatrix}\mu_2 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{bmatrix}$$

令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，　$P_2=\begin{pmatrix}1 & \\ & Q\end{pmatrix}$

则 $P=P_1P_2$ 为所求.

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \lambda_n\end{pmatrix},\quad P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mu_1 & & * \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \mu_n\end{pmatrix}$$

例 36 证明数域 P 上 n 维空间 V 的对合线性变换 φ（即 $\varphi^2=E$）的特征值为 ±1，且 $V=V_1\oplus V_{-1}$

证明 设有 $\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$，$\alpha\neq0$，$\varphi^2(\alpha)=\lambda^2\alpha=\alpha=E(\alpha)$，

$(\lambda^2-1)\alpha=0$，$\alpha\neq0$，$\lambda^2-1=0$，$\lambda=\pm1$

又 $\varphi^2=E$，$(\varphi-E)(\varphi+E)=0$

故秩$(\varphi-E)+$秩$(\varphi+E)=n$

又∵$\mathrm{Ker}(\varphi-E)=V_1$，$\mathrm{Ker}(\varphi+E)=V_{-1}$

维数 V_1+维数 $V_{-1}=n$，且$\forall\ \alpha\in V_1\cap V_{-1}$，

$\varphi(\alpha)=\alpha$，$\varphi(\alpha)=-\alpha$，必 $\alpha=0$，∴$V=V_1\oplus V_{-1}$

推论 若 $A^2=E$，则 $A\sim\begin{pmatrix}E_r & \\ & -E_{n-r}\end{pmatrix}$

例 37 证明 n 维线性空间 V 中的幂等变换 φ（即 $\varphi^2=\varphi$）的特征值为 1，0，且 $V=\varphi(V)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi)=V_1\oplus V$。

证明 见北京大学编高等代数(P311)

推论 若矩阵 $A^2=A$，则 $A\sim\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

例 38 设 φ 和 ψ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换，求证：$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi\cdot\psi))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))+\dim(\mathrm{Ker}(\psi))$

证明 $\varphi\psi$ 的秩$\geqslant\varphi$ 的秩$+\psi$ 秩$-n$

$\varphi\psi$ 的秩$+\dim(\mathrm{Ker}(\varphi\psi))=n$

有 $n\geqslant\varphi$ 的秩$+\psi$ 的秩$-\varphi\psi$ 的秩

$=\varphi$ 的秩$+\psi$ 的秩$-(n-\dim(\mathrm{Ker}(\varphi\psi)))$

$(n-\varphi$的秩$)+(n-\psi$的秩$)\geqslant\dim(\mathrm{Ker}(\varphi\psi))$

故 $\dim(\mathrm{Ker}\varphi\psi)\leqslant\dim(\mathrm{Ker}\varphi)+\dim(\mathrm{Ker}\psi)$

例 39 设 φ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换，且秩 $\varphi^2=$ 秩 φ，则存在线性变换 σ,τ 使 $\varphi^2\sigma=\varphi$，及 $\varphi\tau=\varphi^2$.

证明 取 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，$\varphi$ 在此基下的矩阵为 A，有秩 $A^2=$ 秩 A，$R(A^2)=R(A)$，秩 $A=$ 秩(A,A^2)，

秩 $A^2=$ 秩(A^2,A)，故矩阵方程 $AZ=A^2$

及 $A^2Y=A$ 分别有解 B,C，令

$\tau(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B$，$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)C$

则有 $\varphi\tau=\varphi^2$，$\varphi^2\sigma=\varphi$

例 40 设实对称阵 A 的全部互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 的代数重复度分别为 $t_1,\cdots,t_s$

令 $W=\{B\mid AB=BA,\quad B\in R^{n\times n}\}$则

(1)W 是 $R^{n\times n}$的子空间.

(2)维数 $W=\sum_{i=1}^{s}t_i^2$

证明 (1)$\forall\ B_1,B_2\in W$

$(k_1B_1+k_2B_2)A=k_1B_1A+k_2B_2A=A(k_1B_1+k_2B_2)$

(2)存在正交阵 T，使 $T'AT=\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & & \\ & \lambda_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sE_s\end{pmatrix}=F$

E_i 为 t_i 阶方阵，令 $T'BT=G$，

则 $AB=BA\Longleftrightarrow FG=GF$

故 $G=\begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_s \end{pmatrix}$，$G_i$ 为 t_i 阶方阵，

因此，B 是形如 TGT' 的矩阵.

故，E_{ij}，$i,j=1,2,\cdots,t_1$ 或 $t_1+1,\cdots,t_1+t_2,\cdots$ 或 $t_1+t_2+\cdots+t_{s-1}+1,\cdots,t_1+t_2+\cdots+t_s$ 为 W 的基. 因此

维数 $W=\sum_{i=1}^{s}t_i^2$.

例 41 在线性空间 V 中，线性变换 σ 的互不相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$. W 为 σ 的不变子空间，且 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=\beta_1\in W$. 求证 W 的维数不小于 k.

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关.

$\beta_2=\sigma(\beta_1)-\lambda_1\beta_1=(\lambda_2-\lambda_1)\alpha_2+(\lambda_3-\lambda_1)\alpha_3+\cdots+$
$(\lambda_k-\lambda_1)\alpha_k\in W$,

$\beta_3=\sigma(\beta_2)-\lambda_2\beta_2=(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\alpha_3+\cdots+$
$(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\alpha_k\in W$

…………

$\beta_{k-1}=\sigma(\beta_{k-2})-\lambda_{k-2}\beta_{k-2}$

$=(\lambda_{k-1}-\lambda_1)(\lambda_{k-1}-\lambda_2)\cdots(\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2})\alpha_{k-1}+(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)$
$\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-2})\alpha_k\in W$

$\beta_k=\sigma(\beta_{k-1})-\lambda_{k-1}\beta_{k-1}=(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\alpha_k\in W$

故 $\alpha_k\in W$， 倒推上去 $\alpha_{k-1}\in W$

$\alpha_{k-2},\cdots,\alpha_2,\alpha_1$ 均属于 W.

因此，W 的维数大于等于 k.

练习题

1. 若 $A^m=A$，则 A 相似于对角阵

2. 设 A 可逆，则以下三条等价

①A 相似于对角阵

②A^{-1}相似于对角阵

③A^*相似于对角阵

3. 设 n 阶阵 A 相似于对角阵 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，则存在循环阵 B，使 $A\sim B$.

证明提示　令 $f(\lambda)=b_1+b_2\lambda+b_3\lambda^2+\cdots+b_n\lambda^{n-1}$

解方程组 $\begin{cases} f(1)=\lambda_1 \\ f(\varepsilon)=\lambda_2 \\ f(\varepsilon^2)=\lambda_3 \\ \quad\vdots \\ f(\varepsilon^{n-1})=\lambda_n, \end{cases}$　　ε 为 n 次本原单位根

求得 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，则以 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为第一行得到的循环阵即为所求.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix}\in P^{2\times 2}$，　在 $P^{2\times 2}$中定义 φ

$\varphi:X\to AX-XA,(X\in P^{2\times 2})$

证明：φ是线性变换，找一组基，并写出 φ在此基下的矩阵.

5. 设 P^2 的两组基 $\alpha_1=(1,2)$，　$\alpha_2=(2,1)$与 $\beta_1=(4,5)$，$\beta_2=(1,2)$，线性变换 σ 在基 α_1,α_2 下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，线性变换 τ 在基 β_1,β_2 下的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

求:$\sigma+\tau$ 在 β_1,β_2 下的矩阵,$\sigma\tau$ 在基 α_1,α_2 下矩阵

6. 设 φ 是复数域 C 上的 n 维空间 V 的线性变换,则 φ 可对角化的充要条件是对 φ 的每个特征根 λ_0 都有

$\mathrm{Im}(\varphi_0-\lambda_0 E)\cap\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_0 E)=\{0\}$

提示:$\mathrm{Im}(\varphi-\lambda_0 E)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_0 E)$

$\Longleftrightarrow$ 秩$(\varphi-\lambda_0 E)=$秩$(\varphi-\lambda_0 E)^2\Longleftrightarrow\varphi$ 可对角化.

7. 设 $A,B\in C^{n\times n}$,且 A 是幂零阵, $AB=BA$

则 $|A+B|=|B|$,

〔提示:A 与 B 可同时相似于上三角阵〕

8. n 维空间的线性变换 φ 可对角化,求 φ 的不变子空间的个数.

第八章　λ——矩阵

在处理许多实际问题时，须要将矩阵中的元素——数，推广为多项式．为了解决相似矩阵的标准形的问题，须要讨论λ——矩阵．

一、λ——矩阵的基本概念

数域 P 上多项式环 $P[\lambda]$ 上的矩阵 $(f_{ij}(\lambda))_{n\times m}$ 称为 λ——矩阵．λ——矩阵是数字矩阵的推广．数字矩阵的许多概念和性质可以推广到 λ——矩阵中来．

λ——矩阵对规定的加法、乘法构成有单位元，有零因子的非交换环 $P[\lambda]^{m\times n}$

数字矩阵中的矩阵的秩、子式、行列式、代数余子式、可逆阵、相似阵等的概念均可引入到 λ——矩阵中来，并且有某些类似的性质．

例如，秩 $A(\lambda)B(\lambda)\leqslant\min\{$秩 $A(\lambda)$，秩 $B(\lambda)\}$

但是，λ——矩阵还具有其特殊的性质，即与数字矩阵不同的性质：

例如，两 λ——矩阵的秩相同，不一定等价．

如 $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$；　满秩未必可逆，如 $\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$．

另外，任意 λ——矩阵均可表示成系数是数字矩阵的 λ 的多项式，即

$\forall\ M(\lambda)\in P[\lambda]^{n\times n}$

$$M(\lambda)=M_0\lambda^n+M_1\lambda^{n-1}+\cdots+M_n,\quad M_i\in P^{n\times n}$$

因此有，$P[\lambda]^{n\times n}=P^{n\times n}[\lambda]$

若是用 A 代入，有两种表示方法：

$M^{(r)}(A)=M_0A^n+M_1A^{n-1}+\cdots+M_{n-1}A+M_n$ 与

$M^{(l)}(A)=A^nM_0+A^{n-1}M_1+\cdots+AM_{n-1}+M_n$

一般说来，$M^{(r)}(A)\neq M^{(l)}(A)$

在 $P^{n\times n}[\lambda]$中，可以讨论多项式的运算

二、λ——矩阵的等价标准形

1. λ——矩阵的等价分类

和数字矩阵一样，在 λ——矩阵中，可以建立初等变换与初等矩阵的概念，所不同的是，消法矩阵为 $P(i,j(g(\lambda)))$，而 $P(i,j(g(\lambda)))^{-1}=P(i,j(-g(\lambda)))$，初等矩阵的行列式是一个非零数. 一般说来，λ——矩阵的行列式是 $P[\lambda]$中的一个多项式，但，可逆的 λ——矩阵 $A(\lambda)$的行列式必须是非零常数.

两个 λ——矩阵等价的充要条件是其中之一可由另一个经若干次初等变换而得到，记为 $A(\lambda)\cong B(\lambda)$

λ——矩阵的等价关系具有反身性，对称性、传递性. 因而是分类关系. 环 $P[\lambda]^{n\times n}$可以分成互不相交的等价类.

2. λ——矩阵的等价标准形

任何 λ——矩阵 $A(\lambda)$均可经若干次初等变换化为标准形

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r(\lambda) & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中，$d_i(\lambda)$的首项系数为 1，且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$，

$i=1,\cdots,r-1$.

即 $A(\lambda)\cong M(\lambda)$，称 $d_i(\lambda)(i=1,\cdots,r)$ 为 $A(\lambda)$ 的不变因子.

3. λ——矩阵的行列式因子、不变因子、初等因子.

行列式因子与不变因子之间的关系

$$d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\quad d_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

事实上：$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$，

又有 $D_k^2(\lambda)\,|\,D_{k-1}(\lambda)\cdot D_{k+1}(\lambda)$. $D_k(x)$ 是 k 阶子式的最大公因式.

不变因子与初等因子之间的关系

将不变因子分解成一次因子(连同方幂)之积，各个一次因子(连同其方幂)之总体称为初等因子组.

反之，若是已知 $A(\lambda)$ 的初等因子组及秩 $A(\lambda)=r$，则不变因子 $d_r(\lambda)$ 是全体初等因子的最小公倍式，$d_{r-1}(\lambda)$ 是初等因子组中去掉 $d_r(\lambda)$ 的因子后，剩余因子的最小公倍式，以下不变因子类推.

4. λ——矩阵的等价条件

$A(\lambda)\cong B(\lambda)\Longleftrightarrow$ 标准形相同

$\Longleftrightarrow$ 行列式因子相同，即 $D_i^A(\lambda)=D_i^B(\lambda)$

$\Longleftrightarrow$ 有相同的不变因子，即 $d_i^A(\lambda)=d_i^B(\lambda)$

$\Longleftrightarrow$ 秩 $A(\lambda)=$ 秩 $B(\lambda)$ 且有完全相同的初等因子组

因此可推得 λ——矩阵的可逆条件：

$A(\lambda)$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ 存在 $B(\lambda)$，使 $A(\lambda)B(\lambda)=E$

$\Longleftrightarrow |A(\lambda)|=a\neq 0$

$\Longleftrightarrow$ 秩 $A(\lambda)=n$ 且 $D_n^A(\lambda)=1$

$\Longleftrightarrow d_i(\lambda)=1, \quad i=1,2,\cdots,n$

$\Longleftrightarrow A(\lambda)\cong E$

$\Longleftrightarrow A(\lambda)$等于若干初等矩阵之乘积.

例 1 设$(\lambda E-A)$的不变因子为$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$且$\lambda_0$为$A$的一个特征值.求证:秩$(\lambda_0 E-A)=r$的充要条件是$(\lambda-\lambda_0)|d_{r+1}(\lambda)$且$(\lambda-\lambda_0)\nmid d_r(\lambda)$

证明

$$\because (\lambda E-A)\cong\begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda)\end{pmatrix}=M(\lambda)$$

秩$(\lambda E-A)=$秩$M(\lambda)$

$$\therefore (\lambda_0 E-A)\cong\begin{pmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda_0) & & & \\ & & & d_{r+1}(\lambda_0) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_n(\lambda_0)\end{pmatrix}$$

$=M(\lambda_0)$

秩 $(\lambda_0 E-A)=$秩$M(\lambda_0)$

$\because d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), \quad \therefore$又有$d_i(\lambda_0)|d_{i+1}(\lambda_0)$

$(\lambda-\lambda_0)|d_{r+1}(\lambda_0), \quad$ 即$d_{r+1}(\lambda_0)=0$

$\therefore d_{r+2}(\lambda_0)=\cdots=d_n(\lambda_0)=0$

$(\lambda-\lambda_0)\nmid d_r(\lambda_0), \quad$ 即$d_r(\lambda_0)\neq 0$

故 秩$(\lambda_0 E-A)=r\Longleftrightarrow D_r^A(\lambda)\neq 0$ 且$D_t^A(\lambda)=0 \quad (t>r)$

即$d_r(\lambda_0)\neq 0, \quad d_{r+1}(\lambda_0)=0$

例 2 设矩阵$A\in P^{n\times n}$,对于$g(\lambda)\in P(\lambda)$,有$g(A)=0$,$f(\lambda)$为$P[\lambda]$中次数大于零的多项式,且$(f(x),g(x))=d(x)$,则秩$f(A)=$秩$d(A)$

证明 $\because (f(\lambda),g(\lambda))=d(\lambda)$, $\therefore \exists\, u(\lambda),v(\lambda)$

使 $u(\lambda)f(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=d(\lambda)$,以 A 代 λ 有

$u(A)f(A)+v(A)g(A)=d(A)$, $g(A)=0$

$u(A)f(A)=d(A)$,故秩 $d(A)\leqslant$ 秩 $f(A)$

又 $d(\lambda)\mid f(\lambda)$, $f(\lambda)=d(\lambda)h(\lambda)$, $f(A)=d(A)h(A)$

即有 秩 $f(A)\leqslant$ 秩 $d(A)$,因此秩 $f(A)=$ 秩 $d(A)$

推论 $f(A)$可逆$\Longleftrightarrow(f(x),g(x))=1$

三、关于数字矩阵相似的判定

A 与 B 相似(即存在可逆阵 P,使 $B=P^{-1}AP$,记 $A\sim B$)

$\Longleftrightarrow(\lambda E-A)\cong(\lambda E-B)$

$\Longleftrightarrow A$ 与 B 的行列式因子相同

$\Longleftrightarrow A$ 与 B 的不变因子相同

$\Longleftrightarrow A$ 与 B 的初等因子组相同

$\Longleftrightarrow A$ 与 B 的若当标准形相同

A 与 B 相似的必要条件是。

(1)A 与 B 的特征多项式相等.

(2)$|A|=|B|$

(3)$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$

(4)A 与 B 的特征值相同.

(5)A 与 B 的最小多项式相等.

(6)秩 $A=$ 秩 B

我们可以利用这些条件来判定两个矩阵是否相似.

例 3 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

(1)求 A 的特征多项式与最小多项式.

(2)若 A 相似于对角阵的话,求相似过渡阵.

解 $\triangle_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n-n\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda-n)$

$m_A(\lambda)=\lambda(\lambda-n)$

因为最小多项式无重根,所以 A 相似于对角阵

A 的属于特征值 0 的特征向量为

$\alpha_1=(1,-1,0,\cdots,0)$

$\alpha_2=(1,0,-1,0,\cdots,0)$

……………………

$\alpha_{n-1}=(1,0,\cdots,0,-1)$

A 的属于特征值 n 的特征向量为

$\beta=(1,1,\cdots,1)$

则以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\beta$ 为列向量的矩阵 P 为所求.

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & -1 & \cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n\end{pmatrix}$$

若要求 P 是正交阵亦可办到.

若 $A\sim B$,即存在可逆矩阵 P,使 $B=P^{-1}AP$

下面介绍求矩阵 P 的方法.

①$\because A\sim B\Longleftrightarrow(\lambda E-A)\cong(\lambda E-B)$

因此,存在 $U(\lambda)$,$V(\lambda)$,使

$(\lambda E-A)=U(\lambda)(\lambda E-B)V(\lambda)$

又存在 $R(\lambda)$,V_0 使 $V(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0$

由北京大学编《高等代数》P343 定理 7 及引理 1 的证明知,

$P=V_0$

②$A\sim B$,A 与 B 有相同的若当标准形 J

则存在可逆阵 Q,S,使 $Q^{-1}AQ=J=S^{-1}BS$

因此 $P=QS^{-1}$,(求 Q,S 的方法后面介绍)

四、数字矩阵的标准形:有理标准形、若当标准形.求方阵 A 相似于若当阵的过渡阵的方法

1. 有理标准形

定义 设 $f(\lambda)\in P[\lambda]$

$f(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$ 称 m 阶方阵

$$N_{\circ}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_m\\1&0&\cdots&0&-a_{m-1}\\0&1&\cdots&0&-a_{m-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&-a_2\\0&0&\cdots&1&-a_1\end{pmatrix}$$

为 $f(\lambda)$的伴侣矩阵(或友阵)

例如 $f(\lambda)=2-3\lambda+5\lambda^2+\lambda^3$ 的伴侣阵为$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & +3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

命题1 设 $f(\lambda)$是一个首项系数为1的多项式,N_0 是它的伴侣矩阵,则 N_0 的不变因子是 $1,1,\cdots,1,f(\lambda)$

证明 设 $f(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$

$$(\lambda E-N_0)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_m \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & a_1+\lambda \end{pmatrix}$$

其行列式因子为 $D_1=D_2=\cdots=D_{m-1}=1,D_m(\lambda)=f(\lambda)$,(这里只须由下而上的将下一行乘以 λ 加到上一行去,即可算得)

因此,N_0 的不变因子 $d_1(\lambda),\cdots,d_m(\lambda)$为 $1,\cdots,1,f(\lambda)$.

命题2 设 $A\in P^{n\times n}$,A 的不变因子为 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$, $d_i(\lambda)=\lambda^{m_i}+a_{i1}\lambda^{m_i-1}+\cdots+a_{i,m_i-1}\cdot\lambda+a_{i,m_i}$, $d_i(\lambda)$的伴侣阵:

$$N_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{i,m_i} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{i,m_{i-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{i1} \end{pmatrix}$$

则 $A\sim N=\begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{pmatrix}$

证明 $(\lambda E-N)=\begin{pmatrix} \lambda E_{m_1}-N_1 & & & \\ & \lambda E_{m_2}-N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda E_{m_s}-N_s \end{pmatrix}$

$$\cong\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & d_1(\lambda) & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & d_2(\lambda) & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & d_s(\lambda) \end{pmatrix}\cong$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1(\lambda) & & \\ & & & & d_2(\lambda) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & d_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

A 与 N 的不变因子相同， $\therefore A\sim N$

称 N 为矩阵 A 的有理标准型

命题 3 设矩阵 B 的不变因子为 $1,\cdots,1,f(\lambda)^t$，则 B 相似于

$$B_1=\begin{pmatrix} C & & & \\ N & C & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & N & C \end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里 C 是 $f(\lambda)$的伴侣矩阵，有 t 个 C，

证明提示：求 B_1 的行列式因子，不变因子.

命题 4 若 B 的不变因子为 $1,\cdots,1,\{(\lambda-a)^2+b^2\}^t$，$b\neq0$ 则

$$B\sim B_1=\begin{pmatrix} a & b & & & & & \\ -b & a & & & & & \\ 0 & 1 & a & b & & & \\ 0 & 0 & -b & a & & & \\ & & & 1 & \ddots & & \\ & & & & \ddots\ 1 & a & b \\ & & & & 0 & -b & a \end{pmatrix},$$

有 t 块 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

证明 $|\lambda E-B_1|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -b \\ b & \lambda-a \end{vmatrix}^t=[(\lambda-a)^2+b^2]^t$

$|\lambda E-B|$的左下角 $2t-1$ 阶子式为非零常数，即 $D_{2t-1}(\lambda)=1$

$\therefore B_1$ 的不变因子为 $1,\cdots,1,[(\lambda-a)^2+b^2]^t$，因而 $B\sim B_1$

实系数二次不可约多项式一般为

$h(\lambda)=[\lambda-(a+bi)][\lambda-(a-bi)]$

$=\lambda^2-2a\lambda+(a^2+b^2)=(\lambda-a)^2+b^2$

$h(\lambda)$的伴侣矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & -(a^2+b^2) \\ 1 & 2a \end{pmatrix}=C$$

$$\because P^{-1}CP=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -(a^2+b^2)\\1 & 2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{a}{b}\\0 & -\frac{1}{b}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a & b\\-b & a\end{pmatrix}$$

$$\therefore C=\begin{bmatrix}0 & -(a^2+b^2)\\1 & 2a\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix}$$

命题 5 实数域上 n 阶方阵 A

$\triangle_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}[(\lambda-a_1)^2+b_1^2]^{t_1}\cdots$
$[(\lambda-a_k)^2+b_k{}^2]^{t_k}$

A 的初等因子为$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$， $i=1,2,\cdots,s$
$[(\lambda-a_j)^2+b_j^2]^{t_j}$， $j=1,2,\cdots,k$

$$(\sum_{i=1}^{s}r_i+\sum_{j=1}^{k}2t_j=n)$$

初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$的若当块为 J_i

初等因子$[(\lambda-a_j)^2+b_j{}^2]^{t_j}$的伴侣矩阵

$$B_j=\begin{pmatrix}a_j & b_j & & & \\ -b_j & a_j & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots\ 1 & a_j & b_j\\ & & & -b_j & a_j\end{pmatrix},$$

$$\text{则 } A\sim\begin{pmatrix}J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_s & & \\ & & & B_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & B_k\end{pmatrix}=B$$

证明提示 $\because A$ 与 B 的初等因子组相同

2. **若当标准形**

命题 1 复数域 C 上任一 n 阶方阵 A，都相似于一个若当标准形矩阵 J.

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

其中每一个 $(\lambda E-A)$ 的初等因子确定一个若当块 J_i，并且除若当块的次序外，若当标准阵 J 是唯一的.（证略）

若是用线性变换的观点来说就是

命题 2 复数域 C 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换 φ，总存在 V 的一组基底，使 φ 在这组基下的矩阵是若当标准形 J，并且这个若当阵除去若当块次序外是唯一的.（证略）

推论 1 设

$$\varphi(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

设 J_i 对应着基中向量为 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$

r_i 为 J_i 的阶数，$r_1+r_2+\cdots+r_s=n$

令 $V_i=L(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i})$

则 V_i 是 φ 的不变子空间，且有 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$

推论 2 假设如上

$$令\ J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

则 V_i 是 $(\varphi-\lambda_i E)$ 的循环不变子空间.

证明 $\begin{cases}\varphi(\alpha_{i1})=\lambda_i\alpha_{i1}+\alpha_{i2}\\ \varphi(\alpha_{i2})=\lambda_i d_{i2}+\alpha_{i3}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi(\alpha_i,r_i-1)=\lambda_i,\alpha_i,r_i-1_i+\alpha_{ir_i}\\ \varphi(\alpha\, r_i)=\lambda_i,\alpha_i,r_i\end{cases}$

$$\Longrightarrow\begin{cases}(\varphi-\lambda_i E)\alpha_{i1}=\alpha_{i2}\\ (\varphi-\lambda_i E)\alpha_{i2}=\alpha_{i3}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\varphi-\lambda_i E)\alpha_i,r_i-1=\alpha_{ir_i}\\ (\varphi-\lambda_i E)\alpha_{ir_i}=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}(\varphi-\lambda_i E)\alpha_{i1}=\alpha_{i2}\\ (\varphi-\lambda_i E)^2\alpha_{i1}=\alpha_{i3}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\varphi-\lambda_i E)^{r_i-1}\alpha_{i1}=\alpha_{ir_i}\\ (\varphi-\lambda_i E)^{r_i}\alpha_{i1}=0\end{cases}$$

因此，$V_i=L(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i})$

$$=L(\alpha_{i1},(\varphi-\lambda_i E)\alpha_{i1},\cdots,(\varphi-\lambda_i E)^{r_i-1}\alpha_{i1})$$

这样，V_i 称为$(\varphi-\lambda_i E)$的循环不变子空间.

另外，还有$(\varphi-\lambda_i E)$是 V_i 的幂零变换，这是因为，存在自然数 r_i，使$(\varphi-\lambda_i E)^{r_i}=0$

事实上，$(\varphi-\lambda_i E)^{r_i}$作用于生成元均得零向量，

即 $(\varphi-\lambda_i E)^{r_i}\alpha_{it}=(\varphi-\lambda_i E)^{r_i}(\varphi-\lambda_i E)^{t-1}\alpha_{i1}$

$=(\varphi-\lambda_i E)^{t-1}(\varphi-\lambda_i E)^{r_i}\alpha_{i1}=(\varphi-\lambda_i E)^{t-1}0=0$

推论 3 给出一个求基的方法，使线性变换 φ 在此基下

的矩阵是若当标准形 J. 同时也给出了求方阵 A 相似于若当标准阵 J 的相似过渡矩阵 P 的方法,($P^{-1}AP=J$)这是因为 $A\in C^{n\times n}$,可求得基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使 A 在此基下的矩阵是若当标准形. $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)J$, 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 即得

例 4 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 0 & 2\\ 4 & -5 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

的若当标准形 J,并求 P,使 $P^{-1}AP=J$

解 可求得

$$J=\begin{pmatrix}1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & 1 & -1\end{pmatrix}$$

设 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)J$

由推论 2,α_2 是 A 的属于特征值 1 的特征向量,可解方程组$(E-A)X=0$,求得 $\alpha'_2=(1,1,1,1)$

解方程组$(A-E)X=\alpha_2$ 得 $\alpha_1'=(\frac{3}{2},1,\frac{3}{2},0)$

同样解方程组 $(A+E)X=0$ 得 $\alpha_4'=(1,1,0,0)$

再解方程组 $(A+E)X=\alpha_4$ 得 $\alpha_3'=(\frac{5}{4},1,0,0)$

因此

$$P=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 5 写出以 $f(\lambda)=(\lambda-2)^4(\lambda+1)^2(\lambda-3)$ 为特征多项式的互不相似的若当标准矩阵

解 答案共 10 种

① $$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 2 & & & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

② $$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & 1 & 2 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & 1 & -1 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

③ $\begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ 1 & 2 &&&& \\ & 1 & 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& -1 & \\ &&&& 1 & -1 \end{pmatrix}_3$ ④ $\begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ 1 & 2 &&&& \\ && 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& -1 & \\ &&&& 1 & -1 \end{pmatrix}_3$

⑤ $\begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ & 2 &&&& \\ && 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& -1 & \\ &&&& 1 & -1 \end{pmatrix}_3$ ⑥ $\begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ 1 & 2 &&&& \\ & 1 & 2 &&& \\ && 1 & 2 && \\ &&&& -1 & \\ &&&&& -1 \end{pmatrix}_3$

⑦ $\begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ 1 & 2 &&&& \\ && 2 &&& \\ && 1 & 2 && \\ &&&& -1 & \\ &&&&& -1 \end{pmatrix}_3$ ⑧ $\begin{pmatrix} 2 &&&&& \\ 1 & 2 &&&& \\ & 1 & 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& -1 & \\ &&&&& -1 \end{pmatrix}_3$

⑨ $\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$ ⑩ $\begin{pmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$

3. 几种特殊矩阵的若当标准形

(1)**幂等阵**($A^2=A$)的若当标准形 $J=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

证明 设 $P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$

$\because A^2=A$， $\therefore J^2=J \Longleftrightarrow J_i^2=J_i$， $i=1,\cdots,s$

又 $\therefore A$ 的特征值为 1,0

易于验证 $J_i^2=J_i \Longleftrightarrow J_i=E_{r_i}$ 或 $J_i=0$

所以 $A \sim J=\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

(2)**对称阵**的若当标准形为对角形矩阵

(3)**对合阵**($A^2=E$)的若当标准形

$J=\begin{pmatrix} E_r & \\ & -E_{n-r} \end{pmatrix}$

证明 A 的特征值为 $1,-1$， $A \sim \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$

$A^2=E \Longleftrightarrow J^2=E \Longleftrightarrow J_i^2=E$， $J_i=E$ 或 $J_i=-E$

$$\therefore A \sim \begin{pmatrix} E_r & \\ & -E_{n-r} \end{pmatrix}$$

(4)**周期阵**($A^m=E$)的若当标准形为对角阵. 且对角线上的元素为 m 次单位根.

证明. 设 λ 为 A 的特征根，$A\alpha=\lambda\alpha$

$A^m\alpha=\lambda^m\alpha=E\alpha=\alpha$，　$\therefore \lambda^m-1=0$

即　λ 是 m 次单位根

设　$J=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{bmatrix}$ 为 A 的若当标准形

$A^m=E \Longleftrightarrow J^m=E \Longleftrightarrow J_i{}^m=E_{r_i}$

$\Longleftrightarrow J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$

λ_i 为 m 次单位根

$$\therefore A \sim J=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \lambda_i \text{ 为 } m \text{ 次单位根}$$

(5)**幂零阵**($A\neq 0, A^m=0$)的若当标准形 J 的若当块为幂零若当块，即

$$J_i=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A 的特征根为 0，且 A 不能相似于对角阵

证明 设 $A\alpha=\lambda\alpha$， $A^m\alpha=\lambda^m\alpha=0\alpha=0$

必有 $\lambda^m=0$， $\lambda=0$

$A^m=0 \Longleftrightarrow J^m=0 \Longleftrightarrow J_i^m=0$，有 J_i 为幂零若当块，若 A 相似于对角阵，有 $J_i=0$，进而有 $J=0$，必有 $A=0$，矛盾．因此，A 不能相似于对角阵

(6)**规范阵**，U **矩阵**在复数域上的若当标准形均为对角形阵（后面证）

五、若当标准形的应用

1. 若当块的几个变化规律

(1)设 m 阶若当块

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } J_i^k=\begin{pmatrix} \lambda_k & & & \\ C_k^1 & \lambda^{k-1}, & \lambda^k & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ C^{m-1}\lambda^{k-m+1}, & C_k^{m-2}\lambda_k^{k-m+2}, & \cdots, & \lambda_k \end{pmatrix}$$

证明 由归纳法即可证得。

(2)设 r_i 阶若当块

$$J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

则存在 r_i 阶矩阵： $Q_i=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$，使

$$Q_i^{-1}J_iQ_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}=J_i', \quad \text{且 } Q_i^{-1}=Q_i'=Q_i$$

证明 验证即可.

(3)设 r_i 阶幂零若当块

$$J_i=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

则对于自然数 k,有 $J_i^k=0\Longleftrightarrow k\geqslant r_i$

证明 验证即可

(4)r_i 阶若当块能分介为一个幂零若当块与一个纯对角形阵之和

证明

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{pmatrix}=B_i+C_i$$

(5)r_i 阶若当块能分解为两个对称阵之积.

且其中之一是非退化的.

证明 $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & & \\ 1 & \lambda_i & \\ \ddots & 1 & \ddots \; \lambda_i\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & 1 & \lambda_i \\ & \iddots & \iddots & \\ 1 & \lambda_i & & \\ \lambda_i & & & \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} & & & \lambda_i \\ & \lambda_i & 1 & \\ \iddots & \iddots & & \\ \lambda_i & 1 & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}=F_iQ_i$$

且 $|Q_i|=(-1)^{\frac{r_i(r_i-1)}{2}}\neq 0$

(6)设 r_i 阶若当块

$$J_i=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则对于任意自然数 k,均有 $J_i^k\sim J_i$

证明 J_i 的不变因子为:$1,\cdots,1,(\lambda-1)^{r_i}$.

$|\lambda E_{r_i}-J_i^k|$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1, & & & \\ -k, & \lambda-1 & \ddots & \\ * & & -k, & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-1)^{r_i}$

$(\lambda E_{r_i}-J_i^k)$有 r_i-1 阶子式$\begin{vmatrix} \lambda-1 & & & \\ -k, & \lambda-1 & \ddots & \\ * & & -k, & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^{r_i-1}$

$(\lambda E_{r_i}-J_i^k)$ 还有 r_i-1 阶子式 $\begin{vmatrix} -k, \lambda-1 & & & \\ & -k & \ddots & \\ & * & \ddots & \lambda-1 \\ & & & -k \end{vmatrix}$

$=g(\lambda)$

$\because g(1)=(-k)^{r_i-1}\neq 0$

$\therefore ((\lambda-1)^{r_i-1}, g(\lambda))=1$

故 $(\lambda E_{r_i}-J_i^k)$的 r_i-1 阶行列式因子为 1

因此，$(\lambda E-J_i^k)$的不变因子为 $1,1,\cdots,1,(\lambda-1)^{r_i}$

所以， $J_i^k\sim J_i$

(7)若当块酉相似于对称阵

证明 设

$$J_t=\begin{pmatrix} \lambda_t & & & \\ 1 & \lambda_t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda_t & & & \\ & \lambda_t & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_t \end{pmatrix}$$

$=B_t+C_t$

令 $Q_t=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1^{\cdot} & & \end{pmatrix}$，有 $Q_tB_t=\begin{pmatrix} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$，

$B_tQ_t=\begin{pmatrix} & & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$， $Q_tB_tQ_t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

令 $S_t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(E_t+iQ_t)$，则有

$S_t\overline{S}_t'=\dfrac{1}{2}(E_t+iQ_t)(E_t-iQ_t)$

$$=\frac{1}{2}(E_t+Q_t^2+iQ_t-iQ_t)=E_t$$

$$S_tB_tS_t^{-1}=S_tB_t\bar{S}_t=\frac{1}{2}(E_t+iQ_t)B_t(E_t-iQ_t)$$

$$=\frac{1}{2}(B_t+Q_tB_tQ_t)+\frac{i}{2}(Q_tB_t-B_tQ_t)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}+\frac{i}{2}\begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & \iddots & 0 & -1 \\ 1 & \iddots & \iddots & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}=G_t$$

若　$\lambda_t=a_t+ib_t$

则 $S_tJ_tS_t^{-1}=S_t(B_t+C_t)S_t^{-1}=S_tB_tS_t^{-1}+S_tC_tS_t^{-1}$

$$=S_tB_tS_t^{-1}+a_tE_t+ib_tE_t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_t & 1 & \ddots & \\ 1 & 2a_t & \ddots & 1 \\ & \ddots & 1 & 2a_t \end{pmatrix}$$

$$+\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 2b_t & & & & 1 & \iddots & 0 \\ & \ddots & & 1 & & \iddots & -1 \\ & & 2b_t+1 & & 0 & \iddots & \\ & 1 & & 2b_t & & -1 & \\ \iddots & & 0 & & 2b_t-1 & & \\ & \iddots & & -1 & & \ddots & \\ 1 & \iddots & \iddots & & & & \\ 0 & -1 & & & & & 2b_t \end{pmatrix}\text{（证毕）}$$

(8)，设 m 阶若当块

$$J_m(\lambda_0)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

则 J_m 的特征子空间是一维的.

证明 J_m 的特征值只有 λ_0,秩$(\lambda_0 E-J_m)=m-1$,则齐次方程组$(\lambda_0 E-A)X=0$ 的解空间维数为 $m-(m-1)=1$

(9),和 m 阶幂零若当块

$$J_m(0)\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

相乘可交换的矩阵的形状为:

$$b_{1m-1}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1m} \\ & b_{11} & b_{12} & \cdots \\ & & \ddots & b_{12} \\ & & & b_{11} \end{pmatrix}$$

证明 验证即可.

2. 利用若当块的变化规律,利用若当标准形可以解决一些矩阵方程、矩阵函数、矩阵分解的问题,下面看几个例子

例 6 设 A 为幂零阵,则 $A\pm E$ 非退化

证法一 幂零阵 A 的特征值全是 0

设 J 为 A 的若当标准形,则存在 P,使 $P^{-1}AP=J$,

$|P^{-1}(A\pm E)P|=|J\pm E|\neq 0 \quad \therefore |A\pm E|\neq 0$

证法二 $A\pm E$ 的特征根为± 1,

$|A\pm E|$为其特征值之积,故不为 0

例 7 设 A 为幂零阵,且秩 $A=r$,当 $k>r$ 时则 $A^k=0$

证明 A 的特征值为 0,A 的若当标准阵 J 的若当块 J_i 是幂零若当块,若

$$J_i=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 是 r_i 阶的，

则 $J_i^{r_i}=0$

$\because$ 秩 $A=r$， 有秩 $J=r$， 秩 $J_i\leqslant r$， 故 $J_i^k=0$

$$\therefore A^k\sim J^k=\begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_s^k \end{pmatrix}=0$$

因此 $A^k=0$(k 的最小数是 A 的最高次初等因子的方幂)

例 8 设 A 是 n 阶方阵，且零是 A 的 k 重特征根，证明：秩 $A^k=n-k$

证明 将 A 的若当标准形 J 的子块对角线上是零的放在一起，记为 B_0，则有：

$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} B & \\ & B_0 \end{pmatrix}$，$B_0$ 是 k 阶的，$B_0{}^k=0$，B 为 $n-k$ 阶

$$P^{-1}A^kP=(P^{-1}AP)^k=J^k=\begin{pmatrix} B^k & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

而 $|B^k|=|B|^k\neq 0$

所以秩 $A^k=$ 秩 $J^k=n-k$ （$\because$ 秩 $B^k=n-k$）

例 9 矩阵 $A\in P^{n\times n}$， $m_A(\lambda)$能分解成 P 上一次因子之积，则 $A=M+N$，其中 M 是幂零阵，N 相似于对角阵，

且 $MN=NM$

证明 $m_A(\lambda)$能分解成 P 上一次因子之积，说明 A 的若当标准阵 $J\in P^{n\times n}$

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

令 $J_i=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}=B_i+C_i$

B_i 是幂零若当块,C_i 是对角阵

设 J_i 的阶为 r_i, $k=max(r_1,r_2,\cdots,r_s)$

$A=P^{-1}JP=P^{-1}(B+C)P=P^{-1}BP+P^{-1}CP$

这里 $B=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_s \end{pmatrix}$

令 $P^{-1}BP=M$, $P^{-1}CP=N$, 则 $M^k=P^{-1}B^kP$ $=P^{-1}OP=0$, N 相似于对角阵 C,又 $MN=P^{-1}BPP^{-1}CP$ $=P^{-1}BCP=P^{-1}CBP=P^{-1}CPP^{-1}BP=NM$

将例 9 翻译成线性变换的说法,就是:

设 φ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的线性变换,且 φ 的最小多项式在 P 上可完全分解为一次因子之积.则 φ 可表为两个线性变换的和:$\varphi=\psi+\tau$,其中 ψ 是幂零变换,τ 关于 V 的某基底的阵是对角阵,且 $\psi\tau=\tau\psi$

例 10 设 n 阶方阵 A,B, $C=AB-BA$,且 C 与 A,B 可交换,则 C 为幂零阵.

证明 只须证 C 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全是 0 即可,

$$t_rC = trAB - trBA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

$$\because C^2 = C(AB-BA) = CAB - CBA = (AC)B - B(AC)$$

$$\therefore trC^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 0$$

同理 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^s = 0$

除去等于 0 的 λ_i，并将相同的 λ_i 合并起来有

$$\begin{cases} k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \cdots + k_s\lambda_s = 0 \\ k_1\lambda_1^2 + k_2\lambda_2^2 + \cdots + k_s\lambda_s^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_1\lambda_1^s + k_2\lambda_2^s + \cdots + k_s\lambda_s^s = 0 \end{cases}$$

由此推得 $\lambda_i = 0$ $(i=1,2,\cdots,s)$

例 11 A' 为 A 的转置方阵，求 M 使 $M^{-1}A'M = A$

解 设 A 的若当标准阵 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$

$A = P^{-1}JP$

令 $Q_i = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ Q_i 与 J_i 阶数相同

$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}$， 有 $J' = QJQ$

$$A = P^{-1}JP = P^{-1}QJ'QP = P^{-1}Q(P^{-1})'A'P'QP = M^{-1}A'M,$$

$M = P'QP$， $M' = P'Q'P = M$

例 12 复数域 C 上的任意 n 阶方阵 A，均等于两个对称

阵的乘积，且其中之一是非退化.

证法一

设 A 的若当标准形：$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$

则存在 P，使 $PAP^{-1}=J$

令 $Q_i=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & ⋰ & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$，$Q_i$ 与 J_i 阶数相同.

令 $Q=\begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_s \end{pmatrix}$，则有 $Q'=Q^{-1}=Q$，$J=QJ'Q$

故 $A=P^{-1}JP=P^{-1}QJ'QP=P^{-1}Q(P^{-1})'A'P'QP$
$=(P^{-1}Q(P^{-1})')(A'P'QP)=BC$

这里 $B=P^{-1}Q(P^{-1})'$，$C=A'P'QP$，B 对称且非退化，C 为对称阵. $\because C'=P'Q'PA=P'Q'PAP^{-1}P=P'QJP$
$=P'QJQQP=P'J'QP=P'J'(P')^{-1}P'QP=A'P'QP=C$

证法二

由例 11，存在非退化阵 M，$M'=M$，使
$A=M^{-1}A'M$，$AM^{-1}=M^{-1}A'=S$，
$S'=A(M^{-1})'=AM^{-1}=S$ $\therefore$ $A=SM$

证法三

因 $J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} & & \lambda_i \\ & \lambda_i & 1 \\ \lambda_i & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \cdots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}=F_iQ_i$$

有 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_s \end{pmatrix}=FQ$$

因此 $A=P^{-1}JP=P^{-1}FQP=P^{-1}F(P^{-1})'P'QP$，显然 $P^{-1}F(P^{-1})'$ 与 $P'QP$ 均为对称阵. 且后者是非退化的.

例 13 设方阵 A 的特征多项式 $\triangle_A(\lambda)=(\lambda-1)^n$，则对于任意自然数 k， A^k 都与 A 相似

证明

A 的若当标准形为 $J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$

$J_i=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$， 其阶数为 r_i

$A^k\sim A \Longleftrightarrow J^k\sim J \Longleftrightarrow J_i^k\sim J_i$

由若当块的变化规律 6

$J_i^k\sim J_i$， 即存在 P_i， 使 $P_i^{-1}J_i^kP_i=J_i$

令 $P=\begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_s \end{pmatrix}$ 则 $P^{-1}J^kP=J$，从而 $A^k\sim A$

例 14 证明复数域上任意 n 阶方阵 A 均相似于对称阵.

证明提示：利用若当块的规律 7 自证.

例 15 设 $A\in C^{n\times n}$,

$\triangle_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, $(\lambda_i\neq\lambda_j)$

则 A 的属于特征值 λ_i 的特征子空间 V_{λ_i} 的维数 t_i（即 λ_i 的几何重复度）等于 A 的初等因子中以 λ_i 为根的初等因子的个数. λ_i 的代数重复度 r_i 等于 A 的初等因子中以 λ_i 为根的初等因子的次数的和.

证明 设 A 的若当标准型是 J.

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix},\quad J_i \text{ 的阶数为 } C_i,$$

$C_1+C_2+\cdots+C_m=n$

可以假定相同特征值的若当块相邻靠在一起，不妨设以 λ_1 为特征值的若当块有 d 个： $J_1,\cdots,J_d$

$P^{-1}(\lambda_1E-A)P=\lambda_1E-J$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1E_1-J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1E_d-J_d & & \\ & & & \lambda_1E_{d+1}-J_{d+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_1E_m-J_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & \\ & C \end{pmatrix}$$

其中，

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1E_1-J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1E_d-J_d \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}\lambda_1E_{d+1}-J_{d+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1E_m-J_m\end{pmatrix}$$

设 B 的阶数为 k， $(k=r_1)$

则 秩 $B=k-d$， 秩 $C=n-k$

而秩$(\lambda_1E-A)=$秩$(\lambda_1E-J)=$秩 $B+$秩 $C=n-d$

维数 $V_{\lambda_1}=n-$秩$(\lambda_1E-A)=d=t_1$

以 λ_1 为根的初等因子，只有 $J_1,\cdots,J_d$ 对应的初等因子故 λ_1 的几何重数是 d， λ_1 的代数重复度是 k.

同理， λ_i 的几何重数是 A 的以 λ_i 为根的初等因子的个数，λ_i 的代数重数是以 λ_i 为根的初等因子的次数的和．

推论 1 λ_i 的几何重数是 A 的若当标准形中以 λ_i 为特征值的若当块的个数．

λ_i 的代数重数是 A 的若当标准形中以 λ_i 为特征值的若当块的阶数之和．

推论 2 秩$(\lambda_1E-A)^{r_1}=$秩$(\lambda_1E-J)^{r_1}=$秩$\begin{pmatrix}B^{r_1} & \\ & C^{r_1}\end{pmatrix}$

$=$ 秩$\begin{pmatrix}0 & \\ & C^{r_1}\end{pmatrix}=$秩 $C^{r_1}=n-k=n-r_1$

秩$(\lambda_iE-A)^{r_i}=$秩$(\lambda_iE-J)^{r_i}=n-r_i$

$\mathrm{Ker}(\lambda_iE-A)^{r_i}$的维数是 $n-(n-r_i)=r_i$

推论 3 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 $\alpha_{g_1},\alpha_{g_2},\cdots,\alpha_{g_m}$ 为 A 的特征向量系，$g_i=\sum\limits_{k=1}^{i}C_k$

例 16 设 $A\in P^{n\times n}$有 n 个互不相同的特征根，则与 A 可交换的任一矩阵 B 都可表为 $B=b_0E+b_1A+\cdots$

$+b_{n-1}\cdot A^{n-1}$

且这种表示是唯一的．

证明 存在可逆阵 T，使

$$T^{-1}AT=J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \quad (i\neq j\text{时}, \quad \lambda_i\neq\lambda_j)$$

令 $T^{-1}BT=B_1$， $AB=BA\Longleftrightarrow JB_1=B_1J$

从而 B_1 亦为对角阵

$$B_1=\begin{pmatrix}\mu_1 & & & \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n\end{pmatrix}$$

$B=b_0E+b_1A+b_2A^2+\cdots+b_{n-1}A^{n-1}$

$\Longleftrightarrow B_1=T^{-1}BT=T^{-1}(b_0E+b_1A+\cdots+b_{n-1}A^{n-1})T$

$=b_0E+b_1J+b_2J^2+\cdots+b_{n-1}J^{n-1}$

$\Longleftrightarrow$ 等式两边矩阵的对应元素相等，即：

$$\begin{cases}b_0+\lambda_1b_1+\lambda_1^2b_2+\cdots+\lambda_1^{n-1}b_{n-1}=\mu_1\\ b_0+\lambda_2b_1+\lambda_2^2b_2+\cdots+\lambda_2^{n-1}b_{n-1}=\mu_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_0+\lambda_nb_1+\lambda_n^2b_2+\cdots+\lambda_n^{n-1}b_{n-1}=\mu_n\end{cases}$$

亦即 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{n-1}$ 为方程组

$$\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}\text{的解}$$

但此方程组的系数矩阵的行列式是范德蒙行列式，$\lambda_i\neq\lambda_j$ 系数行列式不等于 0，方程组有唯一解，故得证．

例 17　设 $A\in C^{n\times n}$，且 A 的特征多项式与最小多项式相等（这样的矩阵称为非减次的），则存在 $B\in C^{n\times n}$ 使 $AB=BA$ 的充分必要条件是存在次数不超过 $n-1$ 的多项式

$u(x)\in C[x]$，使得 $B=u(A)$

证明　充分性：$B=u(A)$，因 $xu(x)=u(x)x$，有 $Au(A)=u(A)A$，即是 $AB=BA$.

必要性：设 A 的若当标准型为 J，则存在非退化阵 P，使

$$P^{-1}AP=J=\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

其中，$J_i(\lambda_i)$是以 λ_i 为特征值的 n_i 阶若当块．$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，因为 A 是非减次的，所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 互不相同．令

$P^{-1}BP=G$，由 $AB=BA$ 知 $JG=GJ$，故，

$$G=\begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_k \end{pmatrix},\quad G_i \text{ 为 } n_i \text{ 阶方阵}.$$

$$J_i(\lambda_i)=\lambda_iE_{n_i}+N_i,\quad N_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

由 $G_iJ_i=J_iG_i$ 知 $G_iN_i=N_iG_i$，故由计算知

$$G_i=\begin{pmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} & \cdots & g_{in_i} \\ & g_{i1} & g_{i2} & \ddots & \\ & & & \ddots & g_{i2} \\ & & & & g_{i1} \end{pmatrix}$$

$=g_{i1}(J_i(\lambda_i)-\lambda_i E_{n_i})^0+g_{i2}(J_i(\lambda_i-\lambda_i E_{n_i}))+g_{i3}(J_i(\lambda_i)-\lambda_i E_{n_i})^2$
$+\cdots+g_{in_i}(J_i(\lambda_i)-\lambda_i E_{n_i})^{n_i-1}$
$=g_{i1}E_{n_i}+g_{i2}N_i+g_{i3}N_i^2+\cdots+g_{in_i}N_i^{n_i-1}$

令 $s_i(\lambda)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$， 则 $\partial(s_i((\lambda))=n-n_i$，

当 $i\neq j$ 时， $s_i(J_j(\lambda_j))=0$， 而 $|s_i(J_i(\lambda_i))|\neq 0$.
存在 $[s_i(J_i(\lambda_i))]^{-1}$，且可表为 $s_i(J_i(\lambda_i))$ 的 n_i-1 次多项式，
令 $[s_i(J_i(\lambda_i))]^{-1}G_i=r_i(J_i(\lambda_i))$， $r_i(\lambda)$ 是次数不超过 n_i-1 的多项式.
令 $u_i(\lambda)=s_i(\lambda)r_i(\lambda)$，其次数至多为 $n-n_i+n_i-1=n-1$
则有， $u_i(J_j)(\lambda_j)=S_i(J_j(\lambda_j))r_i(J_j(\lambda_j))=0$ （$i\neq j$ 时）
$u_i(J_i(\lambda_i))=S_i(J_i(\lambda_i))r_i(J_i(\lambda_i))=G_i$
再令 $u(\lambda)=u_1(\lambda)+u_2(\lambda)+\cdots+u_k(\lambda)$， 则

$$u(J)=\begin{pmatrix} u(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & u(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & u(J_k(\lambda_k)) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} u_1(J_1(\lambda_1)) & & & \\ & u_2(J_2(\lambda_2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_k(J_k(\lambda_k)) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} G_1 & & & \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_k \end{pmatrix}=G$$，因此，$B=PGP^{-1}=Pu(J)P^{-1}$

$=u(PJP^{-1})=u(A)$

故，$u(\lambda)$为所求．

例 18 证明两个实数域上的矩阵 A 与 B 在复数域上相似，则它们在实数域上亦相似

证明 A 与 B 在复数域上相似，即存在可逆阵 $P=D+iQ$ 使 $P^{-1}AP=B$， 这里 D,Q 为实数域上矩阵

$$AP=PB,\quad A(D+iQ)=(D+iQ)B$$

有 $AD=DB,\quad AQ=QB$

$\forall$ 实数 λ，均有 $A(D+\lambda Q)=(D+\lambda Q)B$

$\because |D+iQ|\neq 0$

$\therefore |D+\lambda Q|=g(\lambda)\neq 0$

可找到实数 λ_0 使 $|D+\lambda_0 Q|\neq 0$

令 $M=D+\lambda_0 Q$， 则 $AM=MB$

即 $M^{-1}AM=B$， M 为实矩阵

例 19 设 $2n$ 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的标准形

解 交换 A 的第 2 行与第 $n+1$ 行；第 2 列与第 $n+1$ 列得 A 相似于 A_1，再将 A_1 的后 $n-1$ 行与后 $n-1$ 列进行同步交换得 A_1 相似于 A_2

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & E_{n-1} & E_{n-1} \\ & & E_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

继续下去得：

$$A_3=\begin{pmatrix}1&1&&&\\1&0&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&1\\&&&1&0\end{pmatrix}$$

它与 A 也相似，而

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&0\\0&\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}$$

所以 A 的标准形为：

$$J=\begin{pmatrix}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2})E_n&0\\0&(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})E_n\end{pmatrix}$$

例 20 设 φ 为线性空间 $R^{n\times n}$ 的线性变换 $\varphi(A)=A'$

(1)求 φ 的特征根，特征向量，若当标准形.

(2)证明 φ 能分解为 n^2 个秩为 1 的幂等变换.

φ_i 的代数和，且当 $i\neq j$ 时，$\varphi_i\varphi_j=0$

证明 φ 是对合变换，故特征值为 1，－1.

φ 的属于特征值 1 的特征向量是对称阵

φ 的属于特征值－1 的特征向量是反对称阵

存在 $R^{n\times n}$ 的基底 $\alpha_1,\cdots\alpha_{n^2}$，使 φ 的若当标准形为：

$$J=\begin{pmatrix}E_{\frac{n(n+1)}{2}}&\\&-E_{\frac{n(n-1)}{2}}\end{pmatrix}_{n^2\times n^2}$$

$$J=E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n+1)}{2}}-E_{\frac{n(n+1)}{2}+1,\frac{n(n+1)}{2}+1}-\cdots-E_{n^2,n^2}$$

E_{ii}为第 i 行 i 列为 1 其余元素为 0 的 n^2 阶方阵

令 φ_i 为 $\varphi_i(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n^2})=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n^2})E_{ii}$

则有 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_{\frac{n(n+1)}{2}}-\varphi_{\frac{n(n+1)}{2}+1}\cdots-\cdots-\varphi_{n^2}$

$\because\quad E_{ii}\cdot E_{ii}=E_{ii},\quad E_{ii}E_{jj}=0\quad(i\neq j$ 时)

$\therefore\quad \varphi_{ii}^2=\varphi_i,\quad \varphi_i\varphi_j=0$

练习题

1. 已知$(f(\lambda),g(\lambda))=1$， 求证

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$$

2. 设 A、$B\in P^{n\times n}$， $\triangle_B(\lambda)$，$\triangle_A(\lambda)$是 B，A 的特征多项式，则$\triangle_B(A)$可逆$\Longleftrightarrow(\triangle_A(\lambda),\triangle_B(\lambda))=1$

3. 设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$， 求 A 的有理标准形

4. 写出以 $f(\lambda)=(\lambda+2)^3(\lambda-3)^2$ 为特征多项式的互不相似的若当标准矩阵.

5. 写出以 $f(\lambda)=(\lambda-2)^4(\lambda-5)^3$ 为特征多项式和以 $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2$ 为最小多项式的互不相似的若当标准矩阵.

（提示：对角块阵的最小多项式是各个块的最小多项式的最小公倍式）

6. 设 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

求：可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为若当标准形

答案：

$$P=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 2 & \\ & 1 & 2\end{pmatrix}$$

4）设 A 的不变因子为 $1,\cdots,1,(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,(\lambda^2-2\lambda-3)^3$

求　(1)A 在有理数域上的有理标准形

(2)A 在实数域上的标准形

(3)A 在复数域上的若当标准形

7. 设 λ_i 是方阵 A 的 r_i 重特征根，求证

秩$(\lambda_i E-A)^{r_i}=n-r_i$　（提示：用若当标准形）

8. 设 J_1 是以 2 为特征值的若当块，证明 J_1^2 相似于以 4 为特征值的若当块.

9. 设 $A^2=E$，　$|A|=1$，　求证 $A\sim(A^*)'$

10. 证明矩阵 A 的线性无关的特征向量的最大个数是其初等因子的个数.

11. 设 A 的若当标准型为

$$J=\begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & & & & & \\ & 1 & 2 & & & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & & & \\ & & & 1 & 2 & & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

试写出

(1)A 的特征多项式与最小多项式：

(2)A 的特征值的代数重复度与几何重复度

(3)A 的全体特征向量组的秩

12. 设 A 为 n 阶幂等阵，求证 $t_rA=$ 秩 A，

秩$(E-A)=n-$秩 A

13. n 阶矩阵 $A=A'$，$\triangle_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^k(\lambda-\lambda_2)^{n-k}$，

求证：$A^2-(\lambda_1+\lambda_2)A+\lambda_1\lambda_2E=0$

14. 复数域上 n 阶阵 A,B，其中 A 是幂零阵，且 $AB=BA$

则 $|A+B|=|B|$

(提示：A,B 可同时相似于上三角阵)

第九章　内积空间

为解决用正交变换把二次型化为标准型问题(主轴问题),须在线性空间的基础上引入度量概念,建立欧氏空间,连同酉空间称为内积空间.

一、基本概念,格兰姆矩阵与度量阵

1. **定义**　设 P 是实数域或复数域,V 是 P 上的一个线性空间,定义 $V\times V$ 到 P 的一个映射,使得对于任意的 α、$\beta\in V$,都有唯一确定的 P 中数(记为 (α,β))与之对应.若该映射满足下列条件:

(1)　$(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$
(2)　$(\lambda\alpha,\beta)=\lambda(\alpha,\beta)$　(对第一变元线性)

(3)　$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$　(对称性)

(4)　(α,α)是非负实数.$(\alpha,\alpha)=0\Longleftrightarrow\alpha=0$(正定性)

其中 α、β、$\gamma\in V$,　$\lambda\in P$.则称该映射为内积.称定义了内积的空间为内积空间

当 P 为实数域 R 时,内积空间就是通常的欧氏空间.(即 Euclid 空间)这时(3)变为 $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

当 P 为复数域 C 时,内积空间称为酉空间(U 空间).

注意:①(1),(2)可由 $(\lambda\alpha+u\beta,\gamma)=\lambda(\alpha,\gamma)+u(\beta,\gamma)$ 代替

②同一内积空间可引入不同的内积

例如，$V=R^n$，　$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，　$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

$(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot b_k$，　亦可$(\alpha,\beta)=\sum_{k=1}^{n}2a_k\cdot b_k$

同一线性空间如带有不同的内积应视为不同的内积空间.

③$\alpha\in V$，　$\alpha=0\Longleftrightarrow\forall\ \beta\in V$，均有$(\alpha,\beta)=0$

证明　$\Longrightarrow(0,\beta)=(\gamma-\gamma,\beta)=(\gamma,\beta)-(\gamma,\beta)=0$

$\Longleftarrow$取$\beta=\alpha$，　$(\alpha,\beta)=(\alpha,\alpha)=0\Longleftrightarrow\alpha=0$

2. 内积空间中的度量

(1)对于$\alpha\in V$，称$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$为向量$\alpha$的长. 长度为1的向量称为单位向量. 非零向量$\alpha$，总可化为单位向量$\frac{1}{|\alpha|}\alpha$

性质　①$|\alpha|\geqslant0$，且$|\alpha|=0\Longleftrightarrow\alpha=0$

②$|C\alpha|=|C|\cdot|\alpha|$，　($|C|$表数$C$的模)

③Cauchy—Schwarz　不等式

$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$，等号成立$\Longleftrightarrow\alpha$、$\beta$线性相关

证明　(这里给出一个当V为欧氏空间的一个证明)(酉空间亦可)

$\forall\ x$、$y\in R$.　$(x\alpha+y\beta,x\alpha+y\beta)\geqslant0$

即$x^2(\alpha,\alpha)+2yx(\alpha,\beta)+y^2(\beta,\beta)\geqslant0$

此为x、y的半正定二次型.

$\therefore\quad\begin{vmatrix}(\alpha,\alpha)&(\alpha,\beta)\\(\alpha,\beta)&(\beta,\beta)\end{vmatrix}\geqslant0$，即得$|(\alpha,\beta)|^2\leqslant|\alpha|^2|\beta|^2$

$\therefore\quad|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$

等号成立$\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}(\alpha,\alpha)&(\alpha,\beta)\\(\alpha,\beta)&(\beta,\beta)\end{vmatrix}=0$

当且仅当$(x\alpha+y\beta,x\alpha+y\beta)=0\Longleftrightarrow x\alpha+y\beta=0$

$\Longleftrightarrow \alpha$、$\beta$ 线性相关

④三角不等式 $|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha\pm\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$

证明 $-|\alpha|\cdot|\beta|\leqslant|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|\cdot|\beta|$（由柯一布不等式）

$|\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta|\leqslant|\alpha|^2+|\beta|^2+2|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha||\beta|$

$(|\alpha|-|\beta|)^2\leqslant(\alpha\pm\beta,\alpha\pm\beta)\leqslant(|\alpha|+|\beta|)^2$

$\therefore |\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha\pm\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$

(2)距离：$\forall\ \alpha,\beta\in V$，$|\alpha-\beta|$ 称为 α 与 β 的距离

性质 ①正定性：$|\alpha-\beta|\geqslant 0$，且 $|\alpha-\beta|=0\Longleftrightarrow\alpha=\beta$

②对称性：$|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

③距离不等式（三角形不等式）

$|\alpha-\gamma|-|\beta-\gamma|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\gamma|+|\beta-\gamma|$

证明 $|\alpha-\beta|=|\alpha-\gamma-\beta+\gamma|=|(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)|\leqslant|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|=|\alpha-\gamma|+|\beta-\gamma|$

同样：$|\alpha-\gamma|\leqslant|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|=|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|$

$\therefore\quad |\alpha-\gamma|-|\beta-\gamma|\leqslant|\alpha-\beta|$

因此：$|\alpha-\gamma|-|\beta-\gamma|\leqslant|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\gamma|+|\beta-\gamma|$

3. 欧氏空间中向量的夹角

非零向量 $\alpha,\beta\in V$，$<\alpha,\beta>=cos^{-1}\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\cdot|\beta|}$ 称为 α 与 β 的夹角．当 α、β 中有零向量或 $<\alpha,\beta>=\dfrac{\pi}{2}$，称 α、β 垂直或正交，记 $\alpha\perp\beta$，$(\alpha,\beta)=0$.

因为复数不能比较大小．所以酉空间中无法定义两向量的夹角．(但可以定义向量的正交)

4. 格兰姆(Gram)矩阵与度量矩阵

设 $\alpha_1,\alpha_2.\cdots\alpha_m$ 是内积空间 V 的一组向量，称矩阵

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2)\cdots(\alpha_1,\alpha_m)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2)\cdots(\alpha_2,\alpha_m)\\\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\(\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2)\cdots(\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的格兰姆矩阵

基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的格兰姆矩阵称为该基底的度量矩阵.

记 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=((\alpha_i,\alpha_j))=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_m\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$

性质 (1)度量矩阵是正定的．格兰姆矩阵是半正定的

任给正定阵 A，则存在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$ 使

$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=A$

证明 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维内积空间 V 的基底，任意不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in P$

$$(\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\varepsilon_k,\sum_{k=1}^{n}x_k\cdot\varepsilon_k)>0$$

即有 $(x_1,x_n,\cdots,x_n)G(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(x_1,\cdots,x_n)'>0$

故：$G(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 是正定的．

同样可证．一般格兰姆矩阵是半正定的．

正定阵 $A=P'P$，取欧氏空间 V 的标准正交基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

令 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)P \quad |P|\neq0$

则 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n)=P'P=A$

(2)不同基的度量阵是合同的．二等价向量组(向量的个

数一样多)的格兰姆矩阵是广义合同的.

证明 设由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 过渡阵为 C. 则

$$G(\eta_1,\cdots,\eta_n)=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)=C'\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)C$$

$$=C'G(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)C$$

同样. 若 $(\beta_1,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)M$

$$G(\beta_1,\cdots,\beta_m)=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}(\beta_1,\cdots,\beta_m)$$

$$=M'\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)M=M'G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)M$$

因为 M 不一定非退化. 所以说是广义合同.

正交基的度量阵是正定对角阵.

标准正交基的度量阵是单位阵 E

(3)设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 有

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$

则:$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=A'A$,

秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=$秩 $A=$秩 $A'A=$秩 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

证明 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=A'\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\cdots,$

$\varepsilon_n)A=A'EA=A'A$

且,$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$的秩$=$秩 $A=$秩 $A'A=$秩 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

度量矩阵的几何意义:上面当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为基时,

$|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|=|A'A|=|A|^2$

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的基．则 $|G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|$ 是以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为棱引出的平行六面体体积的平方．

一般地，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，则 $|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)|$ 为 V 里 k 维超平行体之体积的平方．而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 为此超平行体的棱向量

(4)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充分必要条件是 $|G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|=0$

证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ 秩$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$

$\Longleftrightarrow$ 秩 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$

$\Longleftrightarrow |G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)|=0$

(5)设 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=G(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$，则 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关部分组的充要条件是 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的极大无关组.

证明 从 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任取 r 个向量 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r}$

由 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=G(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 知

$G(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})=G(\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r})$

$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性无关$\Longleftrightarrow |G(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_r})|\neq 0$

$\Longleftrightarrow |G(\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r})|\neq 0$

$\Longleftrightarrow \beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关

由此即可证得．

(6)$|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)|\leqslant|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2\cdots|\alpha_m|^2$

证明 当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$ 线性相关时．显然成立

当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关时．$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 为正定矩阵，而正定矩阵的行列式不超过对角线上元素之积．

5. **内积空间中向量的线性关系**

(1)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V$,则线性组合

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 的充要条件是$(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\alpha_j)=0$, $j=1,2,\cdots,m$

证明 $\Longrightarrow$ 显然

$$\Longleftarrow(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i)=\sum_{j=1}^{m}k_j(\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i,\alpha_j)=0$$

故必 $\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=0$

(2)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,且 $\beta\in V$,β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示. 则其坐标系数为

$$\frac{-1}{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)}\begin{pmatrix}(\beta,\alpha_1)\\(\beta,\alpha_2)\\\vdots\\(\beta,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

证明 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$

$(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m,\alpha_j)=(\beta,\alpha_j)$

即$(\alpha_1,\alpha_j)x_1+(\alpha_2,\alpha_j)x_2+\cdots+(\alpha_m,\alpha_j)x_m=(\beta,\alpha_j)$

$j=1,2,\cdots,m$

即有

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\beta,\alpha_1)\\(\beta,\alpha_2)\\\vdots\\(\beta_1,\alpha_m)\end{pmatrix}$$

但 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)'=\frac{}{G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}$

所以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \dfrac{-1}{G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)} \begin{pmatrix} (\beta,\alpha_1) \\ (\beta,\alpha_2) \\ \vdots \\ (\beta,\alpha_m) \end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为正交向量组时

$$\beta=\frac{(\beta,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1+\frac{(\beta,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\alpha_2+\cdots+\frac{(\beta,\alpha_m)}{(\alpha_m,\alpha_m)}\alpha_m$$

当 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为标准正交组时，

$$\beta=(\beta,\alpha_1)\alpha_1+(\beta,\alpha_2)\alpha_2+\cdots+(\beta,\alpha_m)\alpha_m$$

二、标准正交基底的条件，施密特正交化，满秩阵的正交三角分解

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 n 维内积空间 V 的一组基．若两两正交，即 $i\neq j$ 时，$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$，称此基为正交基

若正交基中每个向量的长均为 1(即是单位向量)称此正交基为标准正交基.

1. 标准正交基的判断

以下五条等价：

(1)$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的标准正交基

(2)$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$

(3)$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵是单位矩阵

(4)$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n$ 为基底，则$\forall\ \beta\in V$

$\beta=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$，有 $x_j=(\beta,\varepsilon_j)$

即 $\beta=\sum_{j=1}^{n}(\beta,\varepsilon_j)\varepsilon_j$

证明 满足上述条件．$\varepsilon_i=0\varepsilon_1+\cdots+0\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i+0\varepsilon_{i+1}+\cdots+0\varepsilon_n$

又 $\varepsilon_i=(\varepsilon_i,\varepsilon_1)\varepsilon_1+\cdots+(\varepsilon_i,\varepsilon_{i-1})\varepsilon_{i-1}+(\varepsilon_i,\varepsilon_i)\varepsilon_i+\cdots+(\varepsilon_i,\varepsilon_n)\varepsilon_n$

$\because$ ε_i 由基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示，坐标唯一．

$\therefore$ $(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$， $i\neq j$ 时；$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=1, i=j$ 时．反之显然

(5)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为基．$\forall\ \alpha,\beta\in\dot{V}$，

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$， $\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\beta_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$

均有 $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i$

证明 $\varepsilon_i=0\varepsilon_1+\cdots+0\varepsilon_{i-1}+1\varepsilon_i+0\varepsilon_{i+1}+\cdots+0\varepsilon_n$

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

反之．显然

(6) $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$， 则 $|\alpha|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

例 1 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是内积空间 V 的标准正交基．

则 (1) $\forall\ \alpha\in V$，有 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\alpha,\varepsilon_i)^2}$

(2) $\forall\ \alpha,\beta\in V$，有 $|\alpha-\beta|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}((\alpha-\beta),\varepsilon_i)^2}$

证明 (略)

2. 标准正交基的求法——施密特(schmidt)正交化过程

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．施密特正交化格式如下：

$\varepsilon_1=\alpha_1$

$$\varepsilon_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\varepsilon_1)}{|\varepsilon_1|^2}\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_3,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2$$

……………………………

$$\varepsilon_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\varepsilon_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{(\alpha_n,\varepsilon_2)}{(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2-\cdots-\frac{(\alpha_n,\varepsilon_{n-1})}{(\varepsilon_{n-1},\varepsilon_{n-1})}\varepsilon_{n-1}$$

再单位化：令 $\eta_i=\frac{1}{|\varepsilon_i|}\varepsilon_i,\quad i=1,2,\cdots,n$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是正交组，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是标准正交组，

$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=L(\eta_1,\cdots,\eta_n)$

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)B$， B 是对角线上元素为 1 的上三角阵.

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C_1$$

$$C_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{|\varepsilon_1|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{|\varepsilon_n|}\end{pmatrix}$$

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)BC_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$$

$C=BC_1$， C 是对角线上元素为正实数的上三角阵

推论 1 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B^{-1}$

$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)C^{-1}$

若是看作空间 C^n 中的式子，则有对于非退化矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，总可以分解为一个正交阵(酉阵)

$Q=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$与一个对角线均是正实数的上三角阵 C^{-1}之积，且分解是唯一的.(称为满秩阵的正交三角分解)

(请读者自证)

同样:将推论应用于 A',A^{-1}与$(A')^{-1}$可以得到 $A=QT=T_1Q_1=Q_2S_1=S_2Q_3$. 其中 Q,Q_1,Q_2 是正交阵. T,T_1 是上三角阵,S_1,S_2 为下三角阵.

这个事实很重要. 应用较多.

下面通过例子介绍两种正交三角分解的方法:

(1)用初等变换的方法:

例2 设

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,求正交矩阵 Q 与对角线上均是正数的上三角阵矩阵 T. 使 $A=QT$

解 设 A 的列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 正交化:

$\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

可对矩阵$\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}$的列施行初等变换:

第一步　是将其第一列乘$-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=-\frac{1}{2}$加到第二列上．

第二步　是再将新矩阵的第一列乘$-\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=-\frac{1}{2}$

加到第三列上．第二列乘$-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=-\frac{1}{3}$加到第三列上．即是：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故有

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&\frac{2}{3}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&\frac{2}{3}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}=Q_1T_1$$

$Q_1=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

再以$\frac{1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$乘 Q_1 的第一列．以$\frac{1}{|\beta_2|}=\sqrt{\frac{2}{3}}$乘 Q_1 的第二列；以$\frac{1}{|\beta_3|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$乘 Q_1 的第三列，得

$$\begin{pmatrix}0&1&\frac{2}{3}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&\sqrt{\frac{2}{3}}&0\\0&0&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}=Q
$$

$$
Q_1=Q\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}
$$

因此 $A=$

$$
\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}
$$

即得，$A=QT$

(2)用合同变换的方法

因为 $A'A$ 是正定矩阵，故存在非退化矩阵 T，使 $T'A'AT=E$，$T'A'=Q'$是正交矩阵，又因 $A'A$ 的顺序主子式均不为零．由矩阵的三角分解知，T'是正线三角矩阵．因此，$A=QT^{-1}$，而 T^{-1}为正线上三角矩阵．即：

第一步，对$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ -E & A \end{pmatrix}$进行初等变换为$\begin{pmatrix} A' & C \\ -E & 0 \end{pmatrix}$这时，$C=A'A$.

第二步，对分块矩阵$(E,A'A,A')$进行合同变换，目的是使 $A'A$ 变为 E. 得到(T',E,Q')

第三步，对矩阵(E,T)施行行的初等变换变为(T^{-1},E)

第四步，即得 $A=QT^{-1}$ Q 为正交阵，T^{-1}为正线上三角阵.

例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad A'A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (\quad E, & & A'A, & & A') \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 13 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

一行乘(-1)加到二行上；四列乘(-1)加到五列上得到：

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 13 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

一行乘$(-\frac{5}{3}$加到三行上；四列乘$(-\frac{5}{3})$加到六列上得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 2 & 1 & \vdots & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{5}{3} & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & \frac{14}{3} & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

二行乘$(-\frac{1}{2}$加到三行上；五列乘$(-\frac{1}{2})$加到六列上得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 2 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & 1 & \vdots & 0 & 0 & \frac{25}{6} & \vdots & \frac{5}{6} & -\frac{5}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$(1行)；$\frac{1}{\sqrt{2}}$(2行)；$\frac{\sqrt{6}}{5}$(3行)；$\frac{1}{\sqrt{3}}$(4列)；$\frac{1}{\sqrt{2}}$(5列)；$\frac{\sqrt{6}}{5}$(6列)得到：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{7\sqrt{6}}{30} & -\frac{\sqrt{6}}{10} & \frac{\sqrt{6}}{5} & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$=(T', E, Q')$$

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

故， $A=QT^{-1}$.

例 3 设实方阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，求正交阵 Q 及特征值均为正数的下三角阵 T，使 $A=TQ$ （请读者自证）

推论 2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 为内积空间 V 中线性无关的向量组，将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 施密特正交化得 $\beta_1,\cdots,\beta_m$

则 $g(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)|=|G(\beta_1,\cdots\beta_m)|$
$=g(\beta_1,\cdots,\beta_m)$

且 $|\beta_k|'=\dfrac{g(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}{g(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1})}$

证明 由 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=(\beta_1,\cdots,\beta_m)T$.

这里 T 是对角线上元素均是 1 的上三角阵.

知 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$

$$=T'\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots, \\ \beta_m \end{pmatrix}(\beta_1\cdots,\beta_m)T=T'G(\beta_1,\cdots,\beta_m)T$$

两端取行列式即得

至于第二个结论可由第五章二次形中，关于正定二次形

的例 1 推出

例 4 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 施密特正交化得

$$\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

则 $g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=g(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\beta_1,\beta_1)(\beta_2,\beta_2)(\beta_3,\beta_3)$

且 $|\beta_k|^2=\dfrac{g(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)}{g(\beta_1,\cdots,\beta_{k-1})}$

解 $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&\frac{2}{3}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{2}{3}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\&1&\frac{1}{3}\\&&1\end{pmatrix}$

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$G(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$g(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=4=g(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=4$$

$$|\beta_1|^2=(\beta_1,\beta_1)=2,\quad |\beta_2|^2=\frac{2\times\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{2}$$

$$|\beta_3|^2=\frac{g(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}{g(\beta_1,\beta_2)}=\frac{4}{3}$$

例 5 设 V 是 n 维欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in V$， $\alpha\in V$，$\alpha\neq 0$， $(\alpha_i,\alpha)>0$， $i=1,2\cdots,n$ 且 $(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant 0(j\neq i)$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

证明 可用施密特正交化将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 正交化为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，即有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n)M$$

这是因为，用归纳法可证明：

当 $i<j$ 时，$(\alpha_i,\beta_j)\leqslant 0$ 及 $(\alpha,\beta_j)>0$， $j=1,\cdots,n$

因而 $\beta_j\neq 0$

则有 $G(\beta_1,\cdots,\beta_n)=M'G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)M$

$\because$ $|G(\beta_1,\cdots,\beta_n)|=\prod_{i=1}^{n}(\beta_i,\beta_i)\neq 0$

$\therefore$ $|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)|\neq 0$

因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．

例 6 证明 n 维欧氏空间内至多有 $n+1$ 个向量，其两两

夹角都大于$\frac{\pi}{2}$.

证明 $\because \quad cos<\alpha,\beta>=\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$

$\therefore \quad (\alpha,\beta)>\frac{\pi}{2}\Longleftrightarrow(\alpha,\beta)<0$

对 n 用归纳法证:

当 $n=1$ 时显然成立.

假定对于 $k-1$ 时成立,

当 $n=k$ 时,k 维空间 W

用反证法:存在 V 的 $k+2$ 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+2}$ 使得$(\alpha_i,\alpha_j)<0(i\neq j)$

取 V 的标准正交基:

$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},e_2,\cdots,e_k$.

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{k+2}$在此基下的坐标为:

$a_1=(|\alpha_1|,0,\cdots,0)$

$a_i=(x_{i1},\cdots,x_{ik}),\quad i=2,\cdots,k+2$

由$(\alpha_1,\alpha_i)<0$ 知 $x_{i1}<0,\quad i=2,\cdots,k+2$

$(\alpha_i,\alpha_j)<0$ 必有 $\sum_{t=2}^{k}x_{it}x_{jt}<0,\quad i,j=2,\cdots,k+2$

此式说明 $k+1$ 个 $k-1$ 元向量$(x_{i2},x_{i3},\cdots,x_{ik})$ $(i=2,3,\cdots,k+2)$两两之数积为负.

此与归纳假设矛盾

三、子空间、内积空间的同构

内积空间作为线性空间,其子空间 W 依照 V 中的内积

也构成内积空间，称 W 为 V 的内积子空间

1. 向量与空间的正交

设 W 是内积空间 V 的子空间，$\alpha\in V$. 若$\forall\ \varepsilon\in W$，均有 $(\alpha,\varepsilon)=0$，称 α 与 W 正交．记 $\alpha\perp W$. $\varepsilon\in W$，我们说 ε 是超平面 W 上的一个点

2. 子空间与子空间的正交

设 W_1,W_2 是 V 的两个子空间，若$\forall\ \alpha\in W_1$，$\beta\in W_2$，均有 $(\alpha,\beta)=0$，则称 W_1 与 W_2 正交，记为 $W_1\perp W_2$.

(1)两个正交子空间的和是直和($\because$ $W_1\cap W_2=0$)

(2)V 的子空间 V_1 有唯一的正交补空间 $V_1{}^{\perp}$

使 $V=V_1\oplus V_1{}^{\perp}$，而 $V_1{}^{\perp}$是由 V 中一切与 V_1 垂直的向量组成的，$(V_1^{\perp})^{\perp}=V_1$

若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\beta_{r+1}\cdots,\beta_n$ 均是 V 的标准正交基.

令 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)=W$，　$L(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n)=M$

$L(\beta_{r+1},\cdots,\beta_n)=N$，则 M,N 均是 W 的正交补，可以证明 $M=N$

事实上，$V=W\oplus M$，　$V=W\oplus N$，$\forall\ \alpha\in M$，有 $\alpha\in V$，$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，　$\alpha_1\in W$，　$\alpha_2\in N$

$(\alpha,\alpha_1)=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_1)+(\alpha_2,\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_1)=0$

故 $\alpha_1=0$，即有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2\in N$

因此，$M\subseteq N$，同理，$N\subseteq M$，所以 $M=N$

3. 向量到子空间的距离

$\alpha,\beta\in V$，$|\alpha-\beta|$是两点间的距离.

α 到子空间 W 的距离，即以垂线最短，即存在 $\beta\in W$，对于任意 $\xi\in W$，均有

$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\xi|$的充分必要条件是$(\alpha-\beta)\perp W$.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 为 W 的标准正交基底,$\forall\ ,\alpha\in V$,则在 W 中唯一存在向量 β,使$(\alpha-\beta)\perp W$,并且 $\beta=(\alpha,\varepsilon_1)\varepsilon_1+(\alpha,\varepsilon_2)\varepsilon_2+\cdots+(\alpha,\varepsilon_r)\varepsilon_r$

证明 $V=W\oplus W^{\perp}$, $\alpha=\beta+\gamma$, $\beta\in W,\gamma\in W^{\perp}$, $(\alpha-\beta)\in W^{\perp}$即有

$(\alpha-\beta)\perp W$,若还有 $\delta\in W$,使$(\alpha-\delta)\perp W$,则有

$[(\alpha-\beta)-(\alpha-\delta)]\perp W$, $(\delta-\beta)\in W^{\perp}$,但$(\delta-\beta)\in W$,故有 $\delta-\beta=0$,因此,$\beta=\delta$

取 $W^{\perp}$的标准正交基底 $\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$ 则

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1}\cdots\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基底

$\alpha=\beta+\gamma=(\alpha,\varepsilon_1)\varepsilon_1+\cdots+(\alpha,\varepsilon_r)\varepsilon_r+(\alpha,\varepsilon_{r+1})\varepsilon_{r+1}+\cdots+(\alpha,\varepsilon_n)\varepsilon_n$

故 $\beta=(\alpha,\varepsilon_1)\varepsilon_1+\cdots+(\alpha,\varepsilon_r)\varepsilon_r$

4. 若 W_1,W_2 是 V 的子空间,若 $W_1\subseteq W_2$,则 $W_1^{\perp}\supseteq W_2^{\perp}$

$(W_1+W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}$;$(W_1\cap W_2)^{\perp}=W_1^{\perp}+W_2^{\perp}$.

5. 同构

数域 P 上的内积空间 V 与 W 作为线性空间同构,其同构映射为 δ,若$\forall\ \alpha,\beta\in V$ 均有

$(\delta(\alpha),\delta(\beta))=(\alpha,\beta)$

则称 δ 是 V 与 W 的同构映射,称 V 与 W 是同构的,记为 $V\cong W$

命题 1 设 $V\overset{\delta}{\cong}W$,则有

(1)$\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 是 V 的正交组当且仅当 $\delta(\alpha_1),\cdots,\delta(\alpha_i)$是 W 的正交组.

(2)$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=G(\delta(\alpha_1),\cdots,\delta(\alpha_s))$

命题 2 数域 P 上两个有限内积空间同构的充要条件是它们的维数相同,这样 P 上任意 n 维内积空间均与 P^n 同构.

例 7 n 维内积空间 V 的可逆变换 φ,可分解为 $\varphi=\psi\tau$,其中 ψ 是酉交换,τ 是特征值均为正实数的线性变换.

证明 φ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A,∵φ 是可逆的.∴A 是非奇异的.

则 $A=QT$,其中 Q 是酉阵,T 是对角线元素为正实数的上三角阵,

∵ $V\cong P^n$,则在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下,Q 与 T 对应的原象即为所求.

例 8 设 ψ,τ 为 n 维内积空间 V 的线性变换,若$\forall\ \alpha\in V$,均有$(\psi(\alpha),\psi(\alpha))=(\tau(\alpha),\tau(\alpha))$,则 $\psi(V)\cong\tau(V)$

证法一

仿酉变换性质 1,②可证$(\psi(\alpha),\psi(\beta))=(\tau(\alpha)),\tau(\beta)$

设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基底.

则 $G(\psi(\varepsilon_1),\cdots,\psi(\varepsilon_n))=G(\tau(\varepsilon_1),\cdots,\tau(\varepsilon_n))$

$\psi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$

$\tau(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)B$

∵ $G(\psi(\varepsilon_1),\cdots,\psi(\varepsilon_n))=A'A$

$G(\tau(\varepsilon_1),\cdots,\tau(\varepsilon_n))=B'B$

∴ $A'A=B'B$, 秩 $A'A=$秩 $A=$秩 ψ, 秩 $B'B=$秩 $B=$秩 τ .

∴ 秩 $\psi=$秩 τ,故 $\psi(V)\cong\tau(V)$

证法二 映射 δ $\psi(\alpha)\longrightarrow\tau(\alpha)$,使 $\psi(V)\cong\tau(V)$

是映射:若 $\psi(\alpha)=\psi(\beta)$,则 $\psi(\alpha-\beta)=0$

$\tau(\alpha-\beta)=0$

有 $\tau(\alpha)=\tau(\beta)$

是单射：若 $\tau(\alpha)=\tau(\beta)$，则 $\tau(\alpha-\beta)=0=\psi(\alpha-\beta)$

有 $\psi(\alpha)=\psi(\beta)$

是满射：$\forall\ \tau(\alpha)\in\tau(V)$，均有 $\psi(\alpha)\in\psi(V)$

并由 $(\psi(\alpha+\lambda\beta),\psi(\alpha+\lambda\beta))=(\tau(\alpha+\lambda\beta),\tau(\alpha+\lambda\beta))$

得：$(\psi(\alpha),\psi(\beta))=(\tau(\alpha),\tau(\beta))=(\delta\psi(\alpha),\delta\psi(\beta))$

（参照酉变性质 1②的证明）

$\delta(\psi(\alpha)+\psi(\beta))=\delta(\psi(\alpha+\beta))=\tau(\alpha+\beta)=\tau(\alpha)+\tau(\beta)$
$=\delta(\psi(\alpha))+\delta(\psi(\beta))$

$\delta(k\psi(\alpha))=\delta(\psi(k\alpha))=\tau(k\alpha)=k\tau(\alpha)=k\delta(\psi(\alpha))$

因此，$\psi(V)\cong\tau(V)$

四、n 维内积空间中的共轭变换

1. 定义 设 ψ 为 n 维内积空间 V 的线性变换

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基底

$\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$，则由 $\overline{A}'$唯一确定的线性变换 τ，使

$\tau(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\overline{A}'$

称 τ 为 ψ 的共轭变换，记 为 $\psi^*=\tau$

2. 性质 (1)线性变换 τ 是 ψ 的共轭变换的充要条件是 $\forall\ \alpha,\beta\in V$，均有$(\psi(\alpha),\beta)=(\alpha,\tau(\beta))$

证明 $\Longrightarrow\tau=\psi^*$， 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基

·

$\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,\quad A=(a_{ij})$

$$\psi^*(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\overline{A}'$$

设 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$， $\beta=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$

则 $(\psi(\alpha),\beta)=(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\psi(\varepsilon_i),\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i)$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j$$

$$(\psi(\varepsilon_i),\varepsilon_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_ia_{ji}$$

同样 $(\alpha,\psi^*(\beta))=(\sum\limits_{i}x_i\varepsilon_i,\sum\limits_{i}y_i\psi^*(\varepsilon_i))$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_i(\varepsilon_i,\psi^*(\varepsilon_j))\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_ia_{ji}$$

故 $(\psi(\alpha),\beta)=(\alpha,\psi^*(\beta)=(\alpha,\tau(\beta))$

$\Longleftarrow\forall\ \alpha,\beta\in V$， 均有 $(\psi(\alpha),\beta)=(\alpha,\tau(\beta))$

$\psi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$， $A=(a_{ij})$

$\tau(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)B$， $B=(b_{ij})$

$a_{ij}=(\psi(\varepsilon_j),\varepsilon_i)=(\varepsilon_j,\tau(\varepsilon_i))=\overline{b}_{ji}$

故 $B=\overline{A}'$，$\therefore$ $\tau=\psi^*$

(2)设 ψ,τ 是内积空间 V 的线性变换，则有

$(\psi^*)^*=\psi$， $(\psi+\tau)^*=\psi^*+\tau^*$

$(k\psi)^*=k\psi^*$ $(\psi\tau)^*=\tau^*\psi^*$

引理 1 设 ψ 为 V 的线性变换，若 $\forall\ \alpha,\beta\in V$ 均有 $(\psi(\alpha),\beta)=0$， 则 $\psi=0$

证明 与任意向量均正交的向量是零向量

$\therefore$ $\psi(\alpha)=0$， $\because$ 对 $\forall\ \alpha\in V$ 均成立，故 $\psi=0$

引理 2 设 ψ 与 τ 是 V 的线性变换，$\forall\ \alpha,\beta\in V$，

均有$(\psi(\alpha),\beta)=(\tau(\alpha),\beta)$， 则 $\psi=\tau$

证明 即有$\forall\ \alpha,\beta\in V$ $(\psi(\alpha)-\tau(\alpha),\beta)=0$

$((\psi-\tau)(\alpha),\beta)=0$ $\therefore \psi-\tau=0$， $\psi=\tau$

应用上面引理不难证明：$(\psi\tau)^*=\tau^*\psi^*$

事实上$(\tau^*\psi^*(\alpha),\beta)=(\psi^*(\alpha),\tau(\beta))=(\alpha,\psi(\tau(\beta)))=$
$(\alpha,\psi\tau(\beta))=((\psi\tau)^*(\alpha),\beta)$

$\therefore$ $\tau^*\psi^*=(\psi\tau)^*$

其它几个等式读者自证．

(3)设 ψ 是内积空间 V 的线性变换，W 是 ψ 的不变子空间，则 $W^\perp$是 ψ^* 的不变子空间

证明 $\forall\ \alpha\in W^\perp,\beta\in W$ 则$(\psi^*(\alpha),\beta)=(\alpha,\psi(\beta))=0$，

$\therefore$ $*(\alpha)\in W^\perp$

(4)设 ψ 是内积空间 V 的线性变换，则 $\psi(V)=\mathrm{Im}\psi$
$=[\mathrm{Ker}(\psi^*)]^\perp$， $\mathrm{Ker}(\psi)=[\psi^*(V)]^\perp$

证明 $\forall\ \alpha\in V$， $\psi(\alpha)\in\psi(V)$， $\beta\in\mathrm{Ker}(\psi^*)$

有 $\psi(\alpha)\in[\mathrm{Ker}(\psi^*)]^\perp$

$$\Longleftrightarrow(\psi(\alpha),\beta)=(\alpha,\psi^*(\beta))=(\alpha,0)=0$$

故 $\varphi(V)=[\mathrm{Ker}(\psi^*)]^\perp$

又$\forall\ \gamma\in[\psi^*(V)]^\perp$． $\forall\ \alpha\in V$

则 $(\gamma,\psi^*(\alpha))=(\psi(\gamma),\alpha)=0$

$$\Longleftrightarrow\psi(\gamma)=0\Longleftrightarrow\gamma\in\mathrm{Ker}(\psi)$$

所以．$\mathrm{Ker}(\psi)=[\psi^*(V))^\perp$

推论 $V=\psi(V)\oplus\mathrm{Ker}\psi^*=\mathrm{Ker}\psi\oplus\psi^*(V)$

五、内积空间中的规范交换(规范矩阵)实规范阵正交相似于准对角阵

1. **定义** 设 φ 是内积空间 V 的线性变换，若存在 φ 的共轭变换 φ^*，使 $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$(即可交换)，则称 φ 是一个规范变换(或正规变换)

易知，酉变换($\varphi\varphi^*=1$)，自共轭变换($\varphi=\varphi^*$)，反自共轭变换($\varphi=-\varphi^*$)，均是规范变换.

相应地，若 $A\in C^{n\times n}$，有 $A\overline{A}'=\overline{A}'A$，则称 A 是一个规范矩阵.(正规矩阵)

酉矩阵(正交矩阵)、厄密特矩阵(实对称阵)、反厄密特阵(反实对称阵)等都是规范矩阵.

2. **性质** (1)设 $A\in C^{n\times n}$，则 A 是规范矩阵的充要条件是存在酉矩阵 Q，使

$Q^{-1}AQ$ 为对角阵($Q^{-1}=\overline{Q}'$)

证明 $\Longleftarrow Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=B,$

$A=QBQ^{-1}$

$B\overline{B}'=\overline{B}'B$，则有

$A\overline{A}'=Q\ B=\overline{A}'A$

$\Longrightarrow$ 存在非奇异阵 T，使 $T^{-1}AT=J$(上三角形若当阵)

对于 T 的列向量施密特正交化，有 $T=QS$

其中 Q 是酉矩阵，S 为上三角阵

$S^{-1}Q^{-1}AQS=J$，　$Q^{-1}AQ=SJS^{-1}$ 是上三角阵，$Q^{-1}AQ$ 又是规范阵，故 $Q^{-1}AQ$ 必为对角阵（性质 10 中有证明）

此性质的"变换"说法是：

对 n 维酉空间的线性变换 φ 是规范变换的充要条件是存在一组标准正交基底，使 φ 在此基下的矩阵是对角形的.

(2) n 维酉空间 V 的线性变换 φ 是规范变换的充要条件是 $\forall\ \varphi-W$，　均有 $\varphi-W^{\perp}$

证明　$\Longrightarrow \forall\ V=W\oplus W^{\perp}$

取 W 及 $W^{\perp}$ 的标准正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\},\{\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$. 则

$$\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}$$

令　$A=\begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}$.　$\therefore A\,\overline{A}'=\overline{A}'A$.

有 $B\,\overline{B}'+D\,\overline{D}=\overline{B}'B$

$\operatorname{tr}(B\,\overline{B}')=\operatorname{tr}(\overline{B}'B)$ 得 $\operatorname{tr}(D\,\overline{D}')=0$

故　$D=0$. 所以 $\varphi-W^{\perp}$

$\Longleftarrow$ 对 n 用归纳法

当 $n=1$ 时，显然成立

假定对 $n-1$ 维空间成立. 今对 n 证

存在 φ 的特征值，特征向量 $\varphi(\alpha_1)=\lambda_1\alpha_1$

令　$W=L(\alpha_1)$，则 $\varphi-W,\varphi-W^{\perp}$

φ 在 $W^{\perp}$ 中引出变换为 φ_1，显然 $\forall\ W^{\perp}$ 中的 φ_1 的不变子空间其正交补也是 φ_1 的不变子空间.

故　由归纳假定，存在 $W^{\perp}$ 的标准正交基底 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$.

使 φ 的矩阵为对角阵 $\begin{pmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

则 φ 关于基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

故 φ 是规范变换.

(3)在 n 维 酉空间 C^n 中①规范矩阵 A 的不同的特征值的特征向量互相正交.②若 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量,则 α 是 $\overline{A}'$ 的属于特征值 $\overline{\lambda}$ 的特征向量.

证明 A 酉相似于对角阵.即存在酉阵 Q, 使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}=B,\quad \lambda_i \text{ 为 } A \text{ 的特征值}$$

$$\overline{(Q^{-1}AQ)_H}=\overline{Q^{-1}\overline{A}'Q}=\begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & & & \\ & \overline{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\lambda}_n \end{pmatrix}=\overline{B}'$$

令 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$, $\overline{A}'\alpha_i=\overline{\lambda}_i\alpha_i$

另外,若有 $A\alpha=\lambda\alpha$, $A\beta=\rho\beta$, $\lambda\neq\rho$, $\overline{A}'\alpha=\overline{\lambda}\alpha$,

$\rho\,\overline{\alpha}'\beta=\overline{\alpha}'\rho\beta=\overline{\alpha}'A\beta=(\overline{A}'\alpha)^H\beta=(\overline{\lambda}\alpha)^H\beta=\lambda\,\overline{\alpha}'\beta$

故 $(\lambda-\rho)\,\overline{\alpha}'\beta=0$, 由 $\lambda-\rho\neq0$, 得 $\overline{\alpha}'\beta=0$,

即 $\alpha\perp\beta$

(4)n 维酉空间 V 中，线性变换 φ 是规范变换的充要条件是：$\forall\ \alpha\in V$，均有 $|\varphi(\alpha)|=|\varphi^*(\alpha)|$

证明 $\Longrightarrow$ $|\varphi(\alpha)|^2=(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))$

$=(\alpha,\varphi^*\varphi(\alpha))=(\alpha,\varphi\varphi^*(\alpha))=(\varphi^*(\alpha),\varphi^*(\alpha))=|\varphi^*(\alpha)|^2$

$\Longleftarrow$ $\forall\ \alpha,\beta\in V$， $|\varphi(\alpha)|=|\varphi^*(\alpha)|$

$|\varphi(\beta)|=|\varphi^*(\beta)|$，$|\varphi(\alpha+\beta)|=|\varphi^*(\alpha+\beta)|$

$|\varphi(\alpha+\beta)|^2=(\varphi(\alpha+\beta),\varphi(\alpha+\beta))$

$=(\varphi(\alpha)+\varphi(\beta),\varphi(\alpha)+\varphi(\beta))$

$=|\varphi(\alpha)|^2+|\varphi(\beta)|^2+(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))+(\varphi(\beta),\varphi(\alpha))$

$|\varphi^*(\alpha+\beta)|^2=|\varphi^*(\alpha)|^2+|\varphi^*(\beta)|^2+(\varphi^*(\alpha),\varphi^*(\beta))$
$+(\varphi^*(\beta),\varphi^*(\alpha))$

得 $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))+(\varphi(\beta),\varphi(\alpha))$

$=(\varphi^*(\alpha),\varphi^*(\beta))+(\varphi^*(\beta),\varphi^*(\alpha))$

即 $(\varphi^*\varphi(\alpha),\beta)+(\beta,\varphi^*\varphi(\alpha))$

$=(\varphi\varphi^*(\alpha),\beta)+(\beta,\varphi\varphi^*(\alpha))$

有 $(\varphi^*\varphi(\alpha)-\varphi\varphi^*(\alpha),\beta)=-(\beta,\varphi^*\varphi(\alpha)-\varphi\varphi^*(\alpha))$

将 β 换成 $\varphi^*\varphi(\alpha)-\varphi\varphi^*(\alpha)$，得 $|\varphi^*\varphi(\alpha)-\varphi\varphi^*(\alpha)|^2=0$

故 $\varphi^*\varphi(\alpha)-\varphi\varphi^*(\alpha)=0$

即 $\varphi^*\varphi(\alpha)=\varphi\varphi^*(\alpha)$， ∵对 $\forall\ \alpha\in V$，均成立.

所以 $\varphi^*\varphi=\varphi\varphi^*$， 即 φ 是规范变换

推论 设 φ 是正规变换. 则 $\mathrm{Ker}\ \varphi=\mathrm{Ker}\ \varphi^*$，$\varphi(V)=\varphi^*(V)$

(5)设 φ、ψ 是 n 维酉空间 V 的规范变换且 $\varphi\psi=\psi\varphi$，则①存在 V 的标准正交基，使 φ,ψ 的矩阵是对角形的. ②$\varphi+\psi$，$\varphi\psi$ 均是规范变换

∵ $V\cong C^n$. 翻译成矩阵的问题 即

$A,B\in C^{n}$ 是两个规范矩阵，且 $AB=BA$. 则

①A 与 B 可以同时酉相似于对角形矩阵

②$A+B,AB$ 均是规范矩阵

证明 ①A 酉相似于对角阵，即酉阵 P_1，使

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & & \\ & \lambda_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_tE_t\end{pmatrix}=G,\quad i\neq j \text{ 时}, \lambda_i\neq\lambda_j$$

$\because\quad (P_1^{-1}AP_1)(P_1^{-1}BP_1)=(P_1^{-1}BP_1)(P_1^{-1}AP_1)$

因而 $P_1^{-1}BP_1=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t\end{pmatrix}$是准对角阵

B 是规范阵 $\Longleftrightarrow P_1^{-1}BP_1$ 是规范阵 $\Longleftrightarrow B_i$ 是规范阵

故　存在酉阵 Q_i，使 $Q_i^{-1}B_iQ_i=D_i$ 为对角阵

令 $Q=P_1\begin{pmatrix}Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_t\end{pmatrix}$，则有 $Q^{-1}AQ=G$

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}Q_1^{-1}B_1Q_1 & & & \\ & Q_2^{-1}B_2Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_t^{-1}B_tQ_t\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_t\end{pmatrix}=D$$

② $\overline{(AB)}'AB=\overline{B}'\overline{A}'AB$

$=\overline{(QDQ^{-1})}'\overline{(QGQ^{-1})}'(QGQ^{-1})(QDQ^{-1})$

$=Q\overline{D}'Q^{-1}Q\overline{G}'Q^{-1}QGQ^{-1}QDQ^{-1}$

$=Q\overline{D}'\overline{G}'GDQ^{-1}=QGD\overline{D}'\overline{G}'Q^{-1}=AB\overline{(AB)}'$

$(A+B)\overline{(A+B)}'=(A+B)(\overline{A}'+\overline{B}')$

$=(QGQ^{-1}+QDQ^{-1})(Q\overline{G}'Q^{-1}+Q\overline{D}'Q^{-1})$

$=Q(G+D)(\overline{G}'+\overline{D}')Q^{-1}=Q(\overline{G}'+\overline{D}')(G+D)Q^{-1}$

$=\overline{(A+B)}'(A+B)$

(6)设 φ 是 n 维酉空间的规范变换，则对于任意自然数 k，都存在 V 的规范变换 ψ，使 $\psi^k=\varphi$

证明 我们证其矩阵说法．设 $A\in C^{n\times n}$是规范阵

则有 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$， Q 为酉阵

设 $u_i^k=\lambda_i$， 令 $B=\begin{pmatrix}u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n\end{pmatrix}$

$A=QB^kQ^{-1}=(QBQ^{-1})^k$， QBQ^{-1}是规范阵，为所求．

(7)设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，$A$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 A 是正规阵的充要条件是

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2$$

证明 若 A 是正规阵，则 A 酉相似于对角阵．

存在酉阵 U． 使 $U^{-1}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$．

$$A\overline{A}'=U\mathrm{diag}(|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)U^{-1}$$

$$\mathrm{tr}A\overline{A}'=\sum_i\sum_j|a_{ij}|^2=\sum_i|\lambda_i|^2$$

反之，若$\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$

A 酉相似于上三角阵 $T=(t_{ij})$

存在酉阵 U， 使 $U^{-1}AU=T$

$U^{-1}A\overline{A}'U=T\overline{T}'$， $\mathrm{tr}A\overline{A}'=\mathrm{tr}T\overline{T}'$

$\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum\limits_{i<j}|t_{ij}|^2$ 故 $\sum\limits_{i<j}|t_{ij}|^2=0$

当 $i<j$ 时，$|t_{ij}|^2=0$， $t_{ij}=0$ 即 T 是对角阵，因此，A 是正规阵.

(8)(谱分解定理)设 A 是酉空间 C^n 的规范阵

则有 $A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_rP_r$， $\lambda_i\in C$， $P_i\in C^{n\times n}$. 满足

①数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 互不相同

②P_i 是厄米特矩阵：$\overline{P}_i'=P_i$， $i=1,2,\cdots,r$

③P_i 是幂等阵，$P_i^2=P_i$

④$P_iP_j=0$， $i\neq j$ 时

⑤$P_1+P_2+\cdots+P_r=E$

反之，若 A 的分解满足①—⑤，则 A 是规范阵

证明 A 是规范阵，则 A 酉相似于对角阵，即有酉阵 Q 使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_r & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1E_1 & & & \\ & \lambda_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_rE_r\end{pmatrix},$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 为 A 的互不相同的特征根，

$$令\ D_1=\begin{pmatrix}E_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix},$$

$$D_2=\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & E_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix},\cdots,\quad D_r=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & E_r\end{pmatrix}$$

则 $Q^{-1}AQ=\lambda_1D_1+\lambda_2D_2+\cdots+\lambda_rD_r$

$\therefore\quad A=\lambda_1QD_1Q^{-1}+\lambda_2QD_2Q^{-1}+\cdots+\lambda_rQD_rQ^{-1}$

$=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_rP_r$，

$P_i=QD_iQ^{-1}$，可以验 证满足①—⑤

反之，若 $A=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r$ 满足①—⑤

则有 $\overline{A}'A=\overline{(\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r)'}(\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r)$

$=\overline{\lambda}_1\lambda_1P_1+\cdots+\overline{\lambda}_r\lambda_rP_r=\lambda_1\overline{\lambda}_1P_1+\cdots+\lambda_r\overline{\lambda}_rP_r=A\,\overline{A}'$

(9)设 $A=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r$ 是 A 的谱分解，则有

①$\lambda_1.\ \lambda_2.\ \cdots.\ \lambda_r$ 是 A 的所有的不同的特征根

②存在多项式 $f_i(\lambda)=\prod_{\substack{j=1\\i\neq j}}^{r}\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$

使 $f_i(A)=P_i$， $f_i(\lambda_i)=1$. $f_i(\lambda_j)=0 \quad (i\neq j)$

即 谱分解是唯一的.

证明 P_i 是幂等阵，有特征值 1，设 $P_iX_i=X_i$

$AX_i=AP_iX_i=(\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r)P_iX_i=\lambda_iP_iX_i=\lambda_iX_i$

即 λ_i 为 A 的特征值

又设 $\lambda_。$为 A 的任一特征值，有 $AX=\lambda_。X$，$X\neq 0$

$\lambda_。X=AX=(\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r)X=\lambda_1P_1X+\cdots+\lambda_rP_rX$

$=\lambda_1Y_1+\cdots+\lambda_rY_r,(Y_i=P_iX)$ （Ⅰ）

又 $\lambda_。X=\lambda_。EX=\lambda_。(P_1+\cdots+P_r)X$

$=\lambda_。P_1X+\cdots+\lambda_。P_rX$

$=\lambda_。Y_1+\cdots+\lambda_。Y_r$ （Ⅱ）

（Ⅱ）－（Ⅰ）得

$(\lambda_。-\lambda_1)Y_1+(\lambda_。-\lambda_2)Y_2+\cdots+(\lambda_。-\lambda_r)Y_r=0$

$\overline{Y_i}'Y_j=\overline{(P_iX)'}P_jX=\overline{X}'\overline{P}'_iP_jX=0 \quad (i\neq j)$

即 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_r$ 两两正交，因之，其中非零向量线性无关. 由 $P_1X+P_2X+\cdots+P_rX=EX=X\neq 0$

知 $P_1X=Y_1,P_2X=Y_2,\cdots,P_r=Y_r$. 不能全为零.

必有 $Y_i=P_iX\neq 0$. 故必有 $\lambda_。-\lambda_i=0$

即 $\lambda_。=\lambda_i$

②的成立可直接验证

(10)实方阵 A 能正交相似于对角阵的充要条件是：A 是规范阵，且特征值为实的.

证明 $\Longrightarrow Q^{-1}AQ=D$， Q 是正交阵，D 是对角阵，

$A=QDQ^{-1}$

$A\overline{A}'=AA'=QDQ^{-1}QD'Q^{-1}=QDD'Q^{-1}=QD'DQ^{-1}$

$=A'A=\overline{A}'A$

$\because$ D 是实的. $\therefore A$ 的特征根，即 D 对角线上的元素为实的.

$\Longleftarrow$**证法一** A 酉相似于对角阵 D，$Q^{-1}AQ=D$

$\because$ Q 的列向量为特征向量.

$\therefore$ 可以要求 Q 实的. 即 Q 是正交阵

证法二 A 的特征根全是实数. 由北京大学编高等代数第九章习题 20，存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=D$ 为上三角阵.

由 A 是规范阵可知 D 是规范阵

下面只须证明规范的上三角阵是对角阵即可

设 $D=(t_{ij})$. 当 $i>j$ 时，$t_{ij}=0$

由 $DD'=D'D$ 知，乘积矩阵对角线上元素为

$t_{11}^2+t_{12}^2+\cdots+t_{1n}^2=t_{11}^2$

$t_{22}^2+t_{23}^2+\cdots+t_{2n}^2=t_{22}^2+t_{12}^2$

…………………………………

$t_{nn}^2=t_{1n}^2+t_{2n}^2+\cdots+t_{nn}^2$

由此可得：当 $i\neq j$ 时，$t_{ij}=0$. 故 D 为对角阵

(11) 实规范阵正交相似于准对角阵，即存在正交阵 Q，使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s\end{pmatrix},\quad r+2s=n$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是实数，为 A 的特征根.

$$A_t=\begin{pmatrix} a_t & b_t \\ -b_t & a_t \end{pmatrix},\quad b_t\neq 0,\quad t=1,2,\cdots,s$$

a_t+ib_t 为特征根

证明 $\because A$ 酉相似于对角阵. 即存在酉阵 Q_1. 使

$$Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}=D,\quad \lambda_i \text{ 是特征根}$$

可以假定 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是实数，$\lambda_{r+1}=a_1+b_1i$，$\lambda_{r+2}=a_2+b_2i$，以下依次. 非实虚根成对共轭出现 $b_j\neq 0$

令 $Q_1=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n)$ α_i 为 A 属于特征根 λ_i 的特征向量

$\because$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 是实数，可以使 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是实的.

$A\alpha_{r+1}=\lambda_{r+1}\alpha_{r+1}=(a_1+b_1i)\alpha_{r+1}$

设 $\alpha_{r+1}=u+iv$，u,v 是实的属于 R^n

$A(u+iv)=(a_1+b_1i)(u+vi)$

$Au=a_1u-b_1v$

$Av=b_1u+a_1v$

$A(u-vi)=(a_1-b_1i)(u-vi)$

因此. 可以假定 $\alpha_{r+2}=\overline{\alpha}_{r+1}$

因 $$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1+b_1i & 0 \\ 0 & a_1-b_1i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ 是酉矩阵，

$$(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_{r+1},\bar{\alpha}_{r+1})Q_1=(\frac{2}{\sqrt{2}}u,\frac{2}{\sqrt{2}}v)$$

则有. $A(\beta_1,\beta_2)=A(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2})Q_1$

$$=(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2})\begin{pmatrix} a_1+b_1 i & 0 \\ 0 & a_1-b_1 i \end{pmatrix}Q_1$$

$$=(\beta_1,\beta_2)Q_1^{-1}\begin{pmatrix} a_1+b_1 i & 0 \\ 0 & a_1-b_1 i \end{pmatrix}Q_1$$

$$=(\beta_1,\beta_2)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$W_{r+1}=L(\alpha_{r+1},\alpha_{r+2})=L(\alpha_{r+1},\bar{\alpha}_{r+1})=L(\frac{2}{\sqrt{2}}u,\frac{2}{\sqrt{2}}v)$$

$$=L(\beta_1,\beta_2), \quad \beta_1=\frac{2}{\sqrt{2}}u, \quad \beta_2=\frac{2}{\sqrt{2}}v$$

如此继续下去. ⋯. 得 $W_{r+s}=L(\alpha_{n-1},\alpha_n)=L(\beta_{2s-1},\beta_{2s})$. $W_t,W_t^{\perp}$ 均是 A 的不变子空间, $t=r+1,\cdots,r+s$

且 $R^n=L(\alpha_1)\oplus L(\alpha_2)\oplus\cdots\oplus L(\alpha_r)\oplus L(\beta_1,\beta_2)\oplus\cdots\oplus L(\beta_{2s-1},\beta_{2s})$

∴ $A(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{2s})$

$$=(\alpha_1,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_2 s)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s \end{pmatrix}$$

$$A_t=\begin{pmatrix} a_t & b_t \\ -b_t & a_t \end{pmatrix},\quad t=1,2,\cdots,s$$

∵ $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{2s}$为 R^n 的标准正交基，

∴ $Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_{2s})$为正交阵，

即有 $$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s \end{pmatrix}=H$$

称 H 为 A 的正交相似标准形.

推论 1 欧氏空间 V 可以分解为其规范变换 φ 的一维和二维不变子空间的直和.

推论 2 ：证明实数域上二阶正规阵的一般形式为

$$r\cdot\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$，其中 $r>0$，$\theta\neq k\pi$，k 为整数.

(请读者自证)

例 8 设 A 是 n 阶实方阵，则 A 是规范阵的充要条件是 $A=SQ=QS$. 这里. S 是半正定阵. Q 是正交阵

证明 由例 18. $A=QS=S_1Q$

这里. Q 是正交阵. S 是半正定阵，S_1 是半正定阵

$\Longleftarrow AA'=QS(QS)'=QSS'Q'=QSSQ'=SSQQ'=S^2$

$A'A=(QS)'QS=S'Q'QS\quad=S'S=SS=S^2$

故 $AA'=A'A$

$\Longrightarrow A=QS.\ A'A=S^2,\ AA'=S_1QQ'S'_1=S_1^2$

$S^2=S_1^2$，因 S 与 S_1 均为半正定阵. 所以 $S=S_1$

故 $QS=SQ$.

例 9 设规范矩阵 A 的全部特征根为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $A\overline{A}'=\overline{A}'A$ 的全部特征根为 $|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2$

证明 规范阵 A 酉相似于对角阵,有酉阵 Q,使

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=D,\quad \lambda_i \text{ 为 } A \text{ 的特征根}.$$

$i=1,2,\cdots,n$

$$\overline{D}'=Q^{-1}\overline{A}'Q=\begin{pmatrix}\overline{\lambda}_1 & & \\ & \overline{\lambda}_2 & \\ & & \overline{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}\overline{A}'AQ=Q^{-1}\overline{A}'QQ^{-1}AQ=\overline{D}'D=\begin{pmatrix}\lambda_1\overline{\lambda}_1 & & & \\ & \lambda_2\overline{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\overline{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

故 $\overline{A}'A$ 的特征根为 $|\lambda_1|^2,|\lambda_2|^2,\cdots,|\lambda_n|^2$

例 9、例 10 亦是规范阵的性质,只是前面的性质较基本一些.

六、酉空间中的酉变换(矩阵)与欧氏空间中的正交变换(矩阵)求正交矩阵的正交相似标准形及其过渡阵的方法,矩阵的奇异值分解

1. **定义**　设 φ 是内积空 间 V 的一个线性变换,$\forall$,$\alpha,\beta\in V$,均有$(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(\alpha,\beta)$. 当 V 是酉空间时,称 φ 为酉变换,当 V 为欧氏空间时,称 φ 为正交变换.

2. **性质**　(1)判别条件:①酉空间(或欧氏空间)V 的线性变换 σ 是酉变换(正交变换)的充分必要条件是,$\forall\ \alpha\in V$,有$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$

证明　必要性显然成立

充分性　$\forall\ \alpha,\beta\in V,\lambda\in C$,有$(\sigma(\alpha+\lambda\beta),\sigma(\alpha+\lambda\beta))=(\alpha+\lambda\beta,\alpha+\lambda\beta)$,将上式展开,注意到$(\alpha,\lambda\beta)=\bar{\lambda}(\alpha,\beta)$　得到

$\lambda(\sigma(\beta),\sigma(\alpha))+\bar{\lambda}(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=\lambda(\beta,\alpha)+\bar{\lambda}(\alpha,\beta)$

令　$\lambda=1$,得:$(\sigma(\beta),\sigma(\alpha))+(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\beta,\alpha)+(\alpha,\beta)$,

令　$\lambda=i$ 得:$(\sigma(\beta),\sigma(\alpha))-(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\beta,\alpha)-(\alpha,\beta)$,

上两式相减得:$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$

②酉空间(欧氏空间)V 的线性变换 σ 是酉变换(正交变换)的充分必要条件是:$\forall\ \alpha,\beta\in V$,均有$|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)|=|\alpha-\beta|$,(即保持向量间的距离不变)

证明　当 σ 是酉(正交)变换时,可以验证$|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)|^2=|\alpha-\beta|^2$,从而$|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)|=|\alpha-\beta|$

反之，$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有$|\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)|=|\alpha-\beta|$，

取 $\beta=-\alpha$，有$|\sigma(\alpha)-\sigma(-\alpha)|=|\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha)|$
$=|\alpha+\alpha|$，$2|\sigma(\alpha)|=2|\alpha|$，　$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$

故　由①知 σ 是酉(正交)变换.

③n 维酉(欧氏)空间 V 的线性变换 σ 是酉(正交)变换的充分必要条件是 σ 在 V 的标准基底下的矩阵是酉(正交)阵，(请读者自证)

④酉(欧氏)空间 V 的线性变换 σ 是酉(正交)变换的充分必要条件是 σ 把 V 的标准正交基底变为标准正交基底(自证)

⑤酉(欧氏)空间 V 的变换 φ 是 V 的酉(正交)变换的充分必要条件是$\forall\ \alpha,\beta\in V$，均有$(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=(\alpha,\beta)$.

证明　必要性显然成立.

充分性　通过计算$|\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|^2=0$

得 $\varphi(\alpha+\beta)-\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)=0$，故 $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$，

同理 $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$，因而 φ 是 V 的线性变换，又保持内积不变所以是酉(正交)变换

⑥欧氏空间 V 的变换 φ 是 V 的正交变换的充分必要条件是$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有$|\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)|=|\alpha+\beta|$.

证明　必要性显然成立.

充分性　取 $\beta=\alpha$，则有 $2|\varphi(\alpha)|=2|\alpha|$，　$|\varphi(\alpha)=|\alpha|$.
又取 $\beta=-\alpha$，　$|\varphi(\alpha)+\varphi(-\alpha)|=|\alpha+(-\alpha)|=0$，
$\varphi(\alpha)+\varphi(-\alpha)=0$，故 $\varphi(-\alpha)=-\varphi(\alpha)$，
$|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|=|\varphi(\alpha)+\varphi(-\beta)|=|\alpha-\beta|$.

由计算：$|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2=4(\alpha,\beta)$

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}[|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2]$$

$$\therefore\quad (\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=\frac{1}{4}[|\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)|^2-|\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)|^2]$$

$$=\frac{1}{4}[|\alpha+\beta|^2-|\alpha-\beta|^2]=(\alpha,\beta)$$

保持内积不变的变换 φ 是线性变换，因而是正交变换.

注：若 V 是酉空间，还须加上条件 $\varphi(i\alpha)=i\varphi(\alpha)$

(2)酉(正交)变换(矩阵)对于变换(矩阵)的乘法作成群

(3)酉变换(正交变换)的特征值的模等于1，且属于不同特征值的特征向量正交.

证明 $\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$， $\alpha\neq 0$， φ 在标准正交基下的酉阵为 A，

则 $A\varepsilon=\lambda\varepsilon$， $\varepsilon\in C^n$ $\overline{(A\varepsilon)}'=\bar{\varepsilon}'\bar{A}'=\bar{\lambda}\,\bar{\varepsilon}'$

$\therefore$ $\overline{(A\varepsilon)}'(A\varepsilon)=\bar{\lambda}\,\bar{\varepsilon}'\lambda\varepsilon=\bar{\lambda}\,\overline{\lambda\varepsilon}'\ \varepsilon$

即 $\bar{\varepsilon}'\bar{A}'A\varepsilon=\lambda\,\overline{\lambda\varepsilon}'$ $\because \bar{A}'A=E$

$\therefore$ $\bar{\varepsilon}'\varepsilon=\lambda\,\overline{\lambda\varepsilon}'\varepsilon$， 由 $\bar{\varepsilon}'\varepsilon\neq 0$ 得 $\bar{\lambda}\lambda=1=|\lambda|^2$

又设 $A\varepsilon=\lambda\varepsilon$， $A\eta=k\eta$， $\lambda\neq k$.

则 $\bar{\varepsilon}'\bar{A}'=\bar{\lambda}\,\bar{\varepsilon}'$，$\bar{\varepsilon}'\ \bar{A}'A\eta=\bar{\lambda}\,\bar{\varepsilon}'\ k\eta=\bar{\lambda}\,k\,\bar{\varepsilon}'\eta$

即 $\bar{\varepsilon}'\eta=\bar{\lambda}k\,\bar{\varepsilon}'\ \eta$， $(\bar{\lambda}k-1)\bar{\varepsilon}'\eta=0$

$\because$ $(\bar{\lambda}k-1)\lambda=\bar{\lambda}\lambda k-\lambda=k-\lambda\neq 0$

$\therefore$ $\bar{\lambda}k-1\neq 0$. 必有 $\bar{\varepsilon}'\eta=0$ 即 ε 与 η 正交.

(4)酉(正交)交换(矩阵)是规范变换，因此规范变换具有的一般性质，酉(正交)变换亦具有.

(5)设欧氏空间 R^n 的正交变换 φ 的非实特征根

$\lambda_i=a+bi$ 的特征向量 $\varepsilon=\alpha+\beta i$. 其中 $\alpha,\beta\in R^n$

求证：①$(\alpha,\beta)=0$，且 $|\alpha|=|\beta|$

②$L(\alpha,\beta)$是φ的不变子空间.

证法一 $\varphi(\alpha+\beta i)=(a+bi)(\alpha+\beta i)$

$\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)i=(a\alpha-b\beta)+(b\alpha+a\beta)i$

$$\begin{cases}\varphi(\alpha)=a\alpha-b\beta\\ \varphi(\beta)=b\alpha+a\beta\end{cases}\quad \text{因此有}\quad \varphi-L(\alpha,\beta)$$

$|\alpha|^2=(\alpha,\alpha)=(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))=(a\alpha-b\beta,a\alpha-b\beta)$

$=a^2|\alpha|^2+b^2|\beta|^2-2ab(\alpha,\beta)$ (Ⅰ)

$|\lambda_1|=a^2+b^2=1,\quad b\neq 0$

$\therefore\quad a^2-b^2=1-2b^2,\quad b^2-a^2=2b^2-1$

由(Ⅰ)得:$|\alpha|^2(1-a^2)-b^2|\beta|^2+2ab(\alpha,\beta)=0$

$|\alpha|^2b^2-b^2|\beta|^2+2ab(\alpha,\beta)=0$

$b^2(|\alpha|^2-|\beta|^2)+2ab(\alpha,\beta)=0$

$b(|\alpha|^2-|\beta|^2)+2a(\alpha,\beta)=0$ (Ⅱ)

又 $(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$

$=a^2(\alpha,\beta)+ab(\alpha,\alpha)-ab|\beta|^2-b^2(\alpha,\beta)$

$=(a^2-b^2)(\alpha,\beta)+ab(|\alpha|^2-|\beta|^2)$

$=(1-2b^2)(\alpha,\beta)+ab(|\alpha|^2-|\beta|^2)$

有 $0=-2b^2(\alpha,\beta)+ab(|\alpha|^2-|\beta|^2)$

即 $a(|\alpha|^2-|\beta|^2)-2b(\alpha,\beta)=0$ (Ⅲ)

将(Ⅱ).(Ⅲ)联立,视$|\alpha|^2-|\beta|^2$与(α,β)为变量得线性方程组,其系数行列式:$-2b^2-2a^2=-2(b^2+a^2)=-2\neq 0$

由克兰姆规则得:$|\alpha|^2-|\beta|^2=0,\quad (\alpha,\beta)=0,$

即 $|\alpha|=|\beta|,\quad (\alpha,\beta)=0.$

因为 $\alpha+\beta i\neq 0$. $\because\ |\alpha|=|\beta|$. $\therefore \alpha\neq 0,\beta\neq 0$

$\because\ (\alpha,\beta)=0$, $\therefore \alpha.\beta$ 线性无关.故 $L(\alpha,\beta)$是二维的.

证法二 用矩阵的方法

正交变换可用正交阵 A 表示，如上有：$\begin{cases} A\alpha=a\alpha-b\beta \\ A\beta=b\alpha+a\beta \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha=aA'\alpha-bA'\beta \\ \beta=bA'\alpha+aA'\beta \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} a\alpha=a^2A'\alpha-abA'\beta \\ b\beta=b^2A'\alpha+abA'\beta \end{cases}$

相加得：$a\alpha+b\beta=A'\alpha$

两端转置：$a\alpha'+b\beta'=\alpha'A$

$a\alpha'\alpha+b\beta'\alpha=\alpha'A\alpha=\alpha'(a\alpha-b\beta)$

$a\alpha'\beta+b\beta'\beta=\alpha'A\beta=\alpha'(b\alpha+a\beta)$

得到：$b\beta'\alpha=-b\alpha'\beta$，$\quad b\beta'\beta=b\alpha'\alpha$

$\because$ $\beta'\alpha=\alpha'\beta$，$\quad b\neq0$，必有 $\beta'\alpha=\alpha'\beta=0$，$\quad$ 即 $\alpha\perp\beta$

$\alpha'\alpha=\beta'\beta$，$\quad$ 即 $|\alpha|=|\beta|$

(6)正交矩阵的特征根为 $1,\cdots,1,-1,\cdots,-1$，

$\cos\theta_1\pm i\sin\theta_1,\cdots,\cos\theta_t,\pm i\sin\theta_t$.

A 的正交相似标准形为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & \\ & & & & & & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\theta_t & \sin\theta_t \\ & & & & & & & & & -\sin\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix}$$

证明 $\because$ 正交阵的特征值的模是 1

$\therefore$ 其实特征根只能是 1 或 -1，而非实复根

可以表为 $\lambda=\cos\theta+i\sin\theta$

再由规范变换(矩阵)的性质 11，即得.

下面通过例子说明求正交阵的正交相似标准形及其过渡阵的方法：

例 11 设正交矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

求 A 的正交相似标准形及其相似过渡正交矩阵.

解 计算出 A 的特征根是 $-1,\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{5}}{3}i$

则 A 的正交相似标准形 F 为

$$F=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

下面求正交矩阵 P，使 $P^{-1}AP=F$

①求 A 的属于特征值 -1 的特征子空间 V_{-1} 的标准正交基底.

这里是 $\alpha=(0,\frac{-2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$

②求 A 的属于特征根 $\frac{2+\sqrt{5}i}{3}$ 的特征子空间的标准正交基底.

这里是：$\eta=(-\frac{\sqrt{2}i}{2},\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{5})$

③令 $\eta=u+vi,\quad u,v\in R^3$

求出 $\beta_1=\frac{2}{\sqrt{2}}u=(0,\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})$

$\beta_2=\frac{2}{\sqrt{2}}v=(-1,0,0)$

④则以 α,β_1,β_2 为列向量的矩阵 P 即为所求

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

可验算得 $P^{-1}AP=P'AP=F$.

(7)若正交阵 A 的行列式 $|A|=-1$,则 A 有特征根 -1. 若正交阵 A 的行列式 $|A|=1$,则存在正交阵 B,使 $B^2=A$

证明 由正交阵的相似标准形知,其行列式为 -1,对角线上元素有 -1,即 A 有特征值 -1,若正交阵 A 的行列式 $|A|=1$,

A 正交相似于标准形为 $\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & D \end{pmatrix}$

其中 D 为形如 $B=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 为对角方块的准对角阵.

令 $C_1=\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$,则 $C_1^2=B$

$\because |A|=1 \quad \therefore -E_q$ 的阶数 q 必为偶数

令 $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}_{q\times q}$ 则 $H^2=-E_q$

存在正交阵 Q,使

$$A=Q\begin{pmatrix} E_p & & & \\ & -E_q & & \\ & & B_1 & \\ & & & B_t \end{pmatrix}Q^{-1},\quad B_j=\begin{pmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$$

$$A=Q\begin{pmatrix} E_p^2 & & & & \\ & H^2 & & & \\ & & C_1^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_t^2 \end{pmatrix}Q^{-1},\ C_j=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\theta_j}{2} & \sin\dfrac{\theta_j}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta_j}{2} & \cos\dfrac{\theta_j}{2} \end{pmatrix}$$

正交阵 $B=Q\begin{pmatrix} E_p & & & & \\ & H & & & \\ & & C_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_t \end{pmatrix}Q^{-1}$为所求. $\because B^2=A$

(8)实矩阵的奇异值分解

命题 1 设 A 为实满秩方阵,则存在正交阵 P_1,P_2 使

$$P_1^{-1}AP_2=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},\quad \lambda_i>0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

且 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 为 AA' 的全部特征值. 即满秩阵正交等价于对

角阵 $diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

证明　由第五章二次型例 5，$A=QS$，其中 Q 为正交阵，S 为正定阵.

则存在正交阵 P，使 $P'SP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，　$\lambda_i>0$

于是 $P^{-1}Q^{-1}AP=P^{-1}SP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=D$

令　$P^{-1}Q^{-1}=P_1^{-1}$，　$P=P_2$　即得 $P_1^{-1}AP_2=D$

又 $AA'=P_1DP_2^{-1}P_2D'P'_1=P_1D^2P_1^{-1}$

故　AA' 的特征值为 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$

命题 2　设 $A\in R^{m\times n}$，秩 $A=r$，则存在 m 阶正交阵 H 与 n 阶正交阵 Q，使

$HAQ=\begin{pmatrix}B_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，　B_r 为 r 阶满秩阵.

证明　∵秩 $A=r$，则存在 M 阶方阵 M 与 n 阶方阵 N，使　$MAN=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，　$A=M^{-1}\begin{pmatrix}E_\gamma & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}N^{-1}$

对 M^{-1} 由施密特正交化推论：$M^{-1}=H^{-1}T$

其中 H^{-1} 为正交阵，T 为上三角阵且其对角线上元素为正实数.

$N^{-1}=SQ^{-1}$，　Q^{-1} 为正交阵，S 为下三角阵且对角线上元素为正实数.

故 $A=H^{-1}T\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}SQ^{-1}$

$=H^{-1}\begin{pmatrix}T_1 & T_2\\ 0 & T_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_1 & 0\\ S_2 & S_3\end{pmatrix}Q^{-1}$

$=H^{-1}\begin{pmatrix}B_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$

∴ 得证

进而，由命题 1，B_r 正交等价于$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{bmatrix}$

即 $B_r=Q_r\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{bmatrix}P_r$， Q_r, P_r 为正交阵

令 $C=\begin{pmatrix}Q_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}$， $F=\begin{pmatrix}P_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}$其均为正交阵

则 $A=H^{-1}\begin{pmatrix}B_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$

$$=H^{-1}\begin{pmatrix}Q_r & \\ & E_{n-r}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \lambda_\gamma & \\ 0 & & & 0\end{bmatrix}FQ^{-1}$$

$$=(H^{-1}C)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ 0 & & & 0\end{bmatrix}FQ^{-1} \qquad (1)$$

$(H^{-1}C)$与(FQ^{-1})均为正交阵

同样，$\lambda_1^2,\cdots,\lambda_r^2$ 是 AA'的全部非零特征根.

称 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} = D_{m\times n}$

为矩阵 A 的正交等价标准形.

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是唯一确定的,称为 A 的奇异值.

正交阵$(H^{-1}C)$与(FQ^{-1})不是唯一存在的,

上面的式子(1)称为 A 的奇异值分解.

推论 1 两个正交等价的 $m\times n$ 实矩阵 A 与 B 有相同的奇异值.

证明 $B=PAQ$, P,Q 为正交阵

则 $BB'=PAQQ'A'P'=PAA'P'$

$BB'\sim AA'$ 故它们有相同的特征值

因此,B 与 A 有相同的奇异值.

推论 2 在 A 的奇异值分解式 $A=PDQ$ 中,

P 的列向量与 Q 的行向量分别是 AA' 和 $A'A$ 的特征向量.

证明 因为. $AA'=PDQQ'D'P'=PDD'P'$

$(AA')P=P\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_r^2,0,\cdots,0)$

故. P 的列向量是 AA' 的特征向量.

同样. $A'A=Q'D'P'PDQ$

$A'AQ'=Q'\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_r^2,0,\cdots,0)$

即得 Q' 的列向量是 $A'A$ 的特征向量.

例 12 任何复方阵必酉相似于上三角阵.

任何实方阵必正交相似于准上三角阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & * & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s \end{pmatrix}$$，这里 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为实数，

$A_1,\cdots,A_s \in R^{2\times 2}$

证明　由第七章线性变换的例 16 知，复方阵 A 必复相似于上三角阵，即有非奇异复阵 Q_1，使

$$Q_1^{-1}AQ_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

下面我们证明 A 复相似于上三角阵，则必酉相似于上三角阵. 对于非奇异阵 Q_1，由施密特正交化方法的推论知

$Q_1=QT$，　Q 为酉阵，T 为上三角阵

从而 $Q^{-1}AQ=TQ_1^{-1}AQ_1T^{-1}$

$$=T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}T^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

λ_i 为 A 的特征根

此例题第二部分的证明留给读者.

例 13　已知 α,β 属于酉空间 V，且 $|\alpha|=|\beta|$，则有酉变换 φ，使 $\varphi(\alpha)=\beta$

证明　若 $\alpha=\beta$，则恒等变换 E 为所求.

若 $\alpha\neq\beta$，则 $|\alpha|\neq 0$，$|\beta|\neq 0$，令 $\alpha_1=\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$，　$\beta_1=\dfrac{1}{|\beta|}\beta$，分别把 α_1 与 β_1 均扩大成 V 的标准正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$.

则　由 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i$.　$i=1,2,\cdots,n$ 确定的变换为所求.

例 14　设 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均属于 n 维欧氏空间 V，且 $|\alpha_1|=|\beta_1|$，　$|\alpha_2|=|\beta_2|$，　$<\alpha_1,\alpha_2>=<\beta_1,\beta_2>$ 则存在正交变换 φ 使 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i$，　$i=1,2$.

证明　当 α_1,α_2 中至少有一个为 0 时，由上例得证. 当 $\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0$，　$G(\alpha_1,\alpha_2)=G(\beta_1,\beta_2)$　$\therefore\alpha_1,\alpha_2$ 与 β_1,β_2 有相同的线性相关性.

若 α_1,α_2 线性相关，有 $\alpha_1=k\alpha_2$，则 $\beta_1=k\beta_2$ 可由上例证.

若 α_1,α_2，线性无关，则 β_1,β_2 亦线性无关. 则分别将其标准正交化并扩大成 V 的两组标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，故由此两组标准正交基所确定的线性变换为所求.

例 15　设有 n 维欧氏空间 V 的两组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$. 则存在正交变换 φ，使 $\varphi(\alpha_i)=\beta_i,i=1,2,\cdots,m$ 的充要条件是：$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=G(\beta_1,\cdots,\beta_m)$

证明　$\Longrightarrow$ 显然

$\Longleftarrow$ 设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

$V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$

秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=$秩$(\beta_1,\cdots,\beta_m)$

$V=V_1+V_1^{\perp}$，　$V=V_2+V_2^{\perp}$

$V_1\cong V_2,V_1^{\perp}\cong V_2^{\perp}$　$\forall\ \gamma\in V$，$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$，$\gamma_1\in V_1$，$\gamma_2\in V_1^{\perp}$

$\varphi(\gamma)=\varphi_1(\gamma_1)+\varphi_2(\gamma_2)$，则 φ 是 V 的线性变换，

且有$(\varphi(\gamma),\varphi(\eta))=(\gamma,\eta)$，　$\eta=\eta_1+\eta_2$，$\eta_1\in V_1,\eta_2\in V_1^{\perp}$，即 φ 是正交变换，$\varphi(\alpha_i)=\beta_i$.

充分性的第二个证明方法：

不妨设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的极大无关部分组，则 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 是 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的极大无关部分组.

用施密特正交化方法将 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 标准正交化得，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$，则有 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)T$， 再将 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 标准正交化得 $\eta_1,\cdots,\eta_r$，则有 $(\eta_1,\cdots,\eta_r)=(\beta_1,\cdots,\beta_r)S$，由假设条件知 $S=T=(t_{ij})$ 是正线上三角阵，将 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$ 扩展成 R^n 的标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\cdots,\varepsilon_n$. 将 $\eta_1,\cdots,\eta_r$ 扩展成 R^n 的标准正交基，$\eta_1,\cdots,\eta_r,\eta_{r+1},\cdots,\eta_n$，则正交变换 $\varphi:\varphi(\varepsilon_i)=\eta_i$ 为所求，$i=1,\cdots,n$. 事实上，令 $T^{-1}=G=(g_{ij})$，亦是正线上三角阵，

$$\varphi(\alpha_1)=\varphi(g_{11}\varepsilon_1)=g_{11}\varphi(\varepsilon_1)=g_{11}\eta_1=\beta_1$$

同理 $\varphi(\alpha_2)=\beta_2,\cdots,\varphi(\alpha_r)=\beta_r$

$$\alpha_{r+1}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\overline{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)}^{-1}\begin{pmatrix}(\alpha_{r+1},\alpha_1)\\(\alpha_{r+1},\alpha_2)\\\vdots\\(\alpha_{r+1},\alpha_r)\end{pmatrix}$$

$$\beta_{r+1}=(\beta_1,\cdots,\beta_r)\overline{G(\beta_1,\cdots,\beta_r)}^{-1}\begin{pmatrix}(\beta_{r+1},\beta_1)\\\vdots\\(\beta_{r+1},\beta_r)\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\alpha_{r+1})=\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\overline{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_{r+1},\alpha_1)\\\vdots\\(\alpha_{r+1},\alpha_r)\end{pmatrix}$$

$=B_{r+1}$，

同理，$\varphi(\alpha_{r+2})=\beta_{r+2},\cdots,\varphi(\alpha_m)=\beta_m$

例 16 设 A,B 为正交矩阵，且 $|AB|=-1$，则 $|A+B|=0$

证明 $A^{-1}B$ 为正交阵，$|A^{-1}B|=|A^{-1}A^{-1}AB|=|A^{-1}|^2|AB|=-1$

$\therefore$ $A^{-1}B$ 有特征根 -1

故$|-E-A^{-1}B|=0$、即$|E+A^{-1}B|=0$

而$|A+B|=|A(E+A^{-1}B)|=|A||E+A^{-1}B|=0$

例 17 设$A\in C^{m\times n}$,秩$A=r$,则$A=A^2=A^H$的充要条件是存在$n\times r$阵U,使$A=UU^H$, $(A^H=\overline{A}')$

这里U的列向量是两两正交的单位向量.

证明 将A的r个线性无关的列向量用施密特正交标准化化为标准正交向量组$\beta_1,\cdots,\beta_r$

设 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir}$为$A$的列向量组的极大无关部分组,则有$(\beta_1,\cdots,\beta_r)=(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir})T$, $(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir})=(\beta_1,\cdots,\beta_r)T^{-1}$,进而有$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r)P=UP$

这里P是$r\times n$矩阵

因秩$A=r$,所以秩$P=r$

下面证明 $P=U^H$

$\because$ $A=A^H=A^2$ $\therefore UP=P^HU^H=P^HU^HUP$

$\because$ $U^HU=E$ $\therefore UP=P^HP$. $(U-P^H)P=0$

秩$P=r$,秩$(U-P^H)=$秩$0=0$,必有$U-P^H=0$,

$U=P^H$, $U^H=P$.

充分性:若$A=UU^H$

则有$A^H=(UU^H)^H=UU^H$

$A^2=UU^HUU^H=UU^H$

因此 $A=A^H=A^2$

七、欧氏空间中的镜面反射变换(矩阵)正交阵可分解为若干个镜面反射阵之积

1. **定义** 设φ是欧氏空间V的变换,$\eta\in V$,$|\eta|=1$,

$\forall\ \alpha\in V,\varphi(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta$，称 φ 为 V 的镜面反射变换，镜面反射变换在标准正交基下的矩阵称为镜面反射矩阵

2. 性质

(1)镜面反射变换是线性变换，是正交变换.

(请读者自证)

(2)镜面反射变换是第二类的正交变换，即其在一组标准正交基底下，矩阵的行列式为 -1

证明 设 φ 是由单位向量 ε_1 确定的镜面反射，将 ε_1 扩展成 V 的标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，则 φ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵的行列式为 -1.

(3)设 $\alpha,\beta\in V$(欧氏空间)，$\alpha\neq\beta$，$|\alpha|=|\beta|=1$，则存在镜面反射 φ，使 $\varphi(\alpha)=\beta$

证明 取 $\eta=\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}$，$\forall\ \gamma\in V$，$\varphi(\gamma)=\gamma-2(\gamma,\eta)\eta$ 是镜面反射变换.

并有 $\varphi(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta=\alpha-2(\alpha,\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|})\dfrac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|}$

$$=\alpha-\frac{2(\alpha,\alpha-\beta)}{|\alpha-\beta|^2}(\alpha-\beta)=\alpha-(\alpha-\beta)=\beta$$

(4)欧氏空间 V 的正交变换可以表示成为一系列镜面反射变换之积.

证明 对 V 的维数 n 用归纳法.

当 $n=1$ 时，由单位向量 η 确定的镜面反射 τ 为：

$\forall\ \alpha\in V=L(\eta)$，$\alpha=k\eta$

$\tau(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta=k\eta-2k\eta=-k\eta=-\alpha$

φ 在标准正交基 η 下的矩阵 A 为(1)或(-1).

当 $A=-1$ 时，$\varphi=\tau$

当 $A=1$ 时， $\varphi=\tau^2$

假定命题对 $n-1$ 成立，现对 n 证.

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的标准正交基底，则

$\varphi(\varepsilon_1)=\eta_1,\varphi(\varepsilon_2)=\eta_2,\cdots,\varphi(\varepsilon_n)=\eta_n$

亦为 V 的标准正交基底.

由性质 3，存在镜面反射 φ_1，使 $\varphi_1(\varepsilon_1)=\eta_1=\varphi(\varepsilon_1)$

可令 $\varphi_1(\varepsilon_2)=\gamma_2,\cdots,\varphi_1(\varepsilon_n)=\gamma_n$. 由正交补空间的唯一性知

$$L(\eta_1)^{\perp}=L(\varphi_1(\varepsilon_2),\varphi_1(\varepsilon_3),\cdots,\varphi_1(\varepsilon_n))=L(\eta_2,\cdots,\eta_n)$$

由 $\varphi_1(\varepsilon_2),\cdots,\varphi_1(\varepsilon_n)$ 到 $\eta_2,\cdots,\eta_n$ 确定 $L(\eta_1)^{\perp}$ 的正交变换 ψ_1，即 $\psi_1(\varphi_1(\varepsilon_i))=\eta_i,\quad i=2,3,\cdots,n$

∵ $L(\eta_1)^{\perp}$ 是 $n-1$ 维欧氏空间

∴ 由归纳假定 $\psi_1=\tau_t\tau_{t-1}\cdots\tau_1$

其中 τ_i 为 $L(\eta_1)^{\perp}$ 的镜面反射变换

令 $\psi(\varphi_1(\varepsilon_i))=\eta_i,\quad i=1,2,\cdots,n$，则 ψ 是 V 的正交变换，这是因为 ψ 变标准正交基为标准正交基.

将 τ_i 扩展成 V 的变换：对每个 $i\quad(i=1,\cdots,t)$

令 $\sigma_i(\eta_1)=\eta_1,\quad \sigma_i(\gamma_j)=\tau_i(\gamma_j),\quad j=2,3,\cdots,n$

则有 $\psi=\sigma_t\sigma_{t-1}\cdots\sigma_1$

∵ $\forall\ \alpha\in V,\quad \alpha=a_1\eta_1+a_2\gamma_2+\cdots+a_n\gamma_n$

$$\sigma_t\sigma_{t-1}\cdots\sigma_1(\alpha)=a_1\sigma_t\cdots\sigma_1(\eta_1)+a_2\sigma_t\cdots\sigma_1(\gamma_2)+\cdots+a_n\sigma_t\cdots\sigma_1(\gamma_n)$$

$$=a_1\eta_1+a_2\tau_t\cdots\tau_1(\gamma_2)+\cdots+a_n\tau_t\cdots\tau_1(\gamma_n)$$

$$=a_1\eta_1+a_2\psi_1(\gamma_2)+\cdots+a_n\psi_1(\gamma_n)$$

$$=a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_n\eta_n=\psi(\alpha)$$

我们说有 $\varphi=\psi\varphi_1=\sigma_t\sigma_{t-1}\cdots\sigma_1\varphi_1$

这是因为：$\forall\ \alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i,\quad \varphi(\alpha)=\sum k_i\varphi(\varepsilon_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\eta_i$

而 $\psi\varphi_1(\alpha)=\sum k_i\,\psi(\varphi_1(\varepsilon_i))=\sum_{i=1}^{n}k_i\,\psi(\gamma_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i\,\eta_i$

故 $\varphi=\psi\varphi_1=\sigma_t\sigma_{t-1}\cdots\sigma_1\varphi_1$

(5) A 是镜面反射矩阵，当且仅当存在单位向量 $a\in R^n$，使 $A=E-2aa'$，$a'=(a_1,\cdots,a_n)$

证明 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维欧氏空间的标准正交基，η 为 V 的单位向量. 由 η 确定的镜面反射为 φ，$\forall\ \alpha\in V$，

$$\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \eta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

则 $$\varphi(\alpha)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}-2(a_1,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\left[\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(a_1,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right]$$

$$=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\left[E-2\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(a_1,\cdots,a_n)\right]\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\left[E-2\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(a_1,\cdots,a_n)\right]\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

即 φ 在标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$E-2\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(a_1,\cdots,a_n),\qquad \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$ 为 R^n 中单位向量.

反之,若给定 R^n 中单位向量 $a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

则矩阵 $A=E-2aa'$ 经基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 确定的变换 φ 是 V 的镜面反射变换.

$$\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)(E-2aa'),\quad \forall\ \alpha\in V,$$

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i$$

$$\varphi(\alpha)=\varphi(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)(E-2aa')\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

$$=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}-(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)(2aa')\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}=\alpha-2(\alpha,\eta)\eta$$

这里 $\eta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

所以 $A=E-2aa'$ 为镜面反射矩阵.

(6)正交矩阵 A 的正交相似标准形可以写成若干个镜面反射矩阵之积

证明 设 A 的正交相似标准形为

$$F=\begin{pmatrix} E_p & & & & & & \\ & -E_q & & & & & \\ & & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & & & \\ & & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos\theta_t & \sin\theta_t \\ & & & & & -\sin\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix}$$

令 $\eta=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $E-2\eta\eta'=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}=C_i$

C_i 为镜面反射矩阵

令 $b=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\frac{3}{4}\theta_i \\ \cos\frac{3}{4}\theta_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$， $|b|=1$，

则 $E-2bb'=B_i$ 为镜面反射矩阵

$$
B_i = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & 1 & & & & & \\
& & & \cos\frac{3}{2}\theta_i & -\sin\frac{3}{2}\theta_i & & & \\
& & & -\sin\frac{3}{2}\theta_i & -\cos\frac{3}{2}\theta_i & & & \\
& & & & & 1 & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

令 $d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sin\frac{1}{4}\theta_i \\ \cos\frac{1}{4}\theta_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$， $|d| = 1$，则 $E - 2dd' = D_i$ 为镜面反射阵

$D_i = E - 2dd' =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\frac{\theta i}{2} & -\sin\frac{\theta i}{2} & & & \\ & & & -\sin\frac{\theta i}{2} & -\cos\frac{\theta i}{2} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

由计算 $B_iD_i = G_i =$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta_i & \sin\theta_i & & & \\ & & & -\sin\theta_i & \cos\theta_i & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

故有，$F = C_{p+1}\cdots C_{p+q}G_{p+q+1}\cdots G_{p+q+t}$

$$= C_{p+1}\cdots C_{p+q}B_{p+q+1}D_{p+q+1}\cdots B_{p+q+t}D_{p+q+t}$$

(7)和镜面反射矩阵正交相似的阵仍是镜面反射阵

证明 设 $H = E - 2\eta\eta'$， $|\eta| = 1$， T 是正交阵，

则 $T'HT = E - 2T'\eta\eta'T = E - 2(T'\eta)(T'\eta)'$， $|T'\eta| = 1$

(8)正交阵可以分解为若干个镜面反面矩阵之积，因而，

正交变换可以分解为若干个镜面反射变换之积.

(请读者自证)

八、厄米特(对称)变换(矩阵)求实反对称阵的正交相似标准形及其过渡阵的方法

1. **定义** 设 φ 是内积空间 V 的线性变换, $\forall\ \alpha,\beta\in V$ 均有 $(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,\varphi(\beta))$,称 φ 为 V 的自共轭变换. 当 V 是酉空间时, φ 称为厄米特变换. 当 V 为欧氏空间时, φ 称为对称变换.

又 $\forall\ \alpha,\beta\in V$,均有 $(\varphi(\alpha),\beta)=(\alpha,-\varphi(\beta))$ 称 φ 为内积空间 V 的一个反自共轭变换. 这时,当 V 是酉空间时,称 φ 为反厄米特变换. 当 V 为欧氏空间时,称 φ 为反对称变换.

2. **性质**

(1)厄米特(对称)变换,反厄米特(反对称)变换均是规范变换,因此它们具有规范变换的一般性质.

(2)(n 维酉空间(欧氏空间)的线性变换 φ 是厄米特(对称)变换的充要条件是 φ 在 V 的标准正交基底下的矩阵是厄米特矩阵(对称阵)A 即 $A=\overline{A}'$ $(A=A')$

同样,线性变换 φ 是反厄米特变换(反对称)的充要条件是 φ 在 V 的标准正交基下的矩阵是反厄米特阵 A(反对称阵),即 $A=-\overline{A}'$ $(A'=-A)$

(3)A 是厄米特阵(对称阵)的充要条件是存在酉阵(正交阵)Q,使 $\overline{Q}'AQ(Q'AQ)$是实对角形矩阵.(证略)

(4)φ是厄米特(对称)变换的充要条件是φ有n个两两正交的单位向量是特征向量并且特征值均是实数

证明 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为$V$的标准正交基

$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A$

存在酉阵(正交阵)Q,使 $\bar{Q}'AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\lambda_i,(i=1,2,\cdots,n)$为$A$的特征值.

令$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Q$

则 $\varphi(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\varphi(\eta_i)=\lambda_i\eta_i$

反之亦真

(5)设φ是n维欧氏空间V的对称变换,若$\forall\ \alpha\in V$,均有$(\varphi(\alpha),\alpha)\geqslant 0$,称$\varphi$是非负的(或半正定的)

若$\forall\ \alpha\in V$, $\alpha\neq 0$,均有$(\varphi(\alpha),\alpha)>0$,称$\varphi$是正定的.

证明对称变换φ是非负的充要条件是φ的特征值均非负

证明 设$\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$, $\alpha\neq 0$

$\Longrightarrow(\varphi(\alpha),\alpha)=(\lambda\alpha,\alpha)=\lambda(\alpha,\alpha)\geqslant 0$

$\because$ $(\alpha,\alpha)>0$,必有$\lambda\geqslant 0$.

$\Longleftarrow\varphi$是对称变换,则存在V的标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,使

$$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即有 $\varphi(\varepsilon_i)=\lambda_i\varepsilon_i$，　$i=1,2,\cdots,n$，$\lambda_i\geqslant 0$

$$\forall\ \alpha\in V,\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\ \varepsilon_i$$

有 $(\varphi(\alpha),\alpha)=(\sum_{i=1}^{n}k_i\varphi(\varepsilon_i),\sum_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i)$

$$=(\sum_{i=1}^{n}k_i\lambda_i\varepsilon_i,\sum_{i=1}^{n}k_i\varepsilon_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i\bar{k}_i\lambda_i\geqslant 0$$

(6)对称变换 φ 是正定的充要条件是 φ 在 V 的标准正交基下的矩阵是正定的

证明　设 V 的标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$

$\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A,\alpha\in V$,

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}k_i\ \varepsilon_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\alpha)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix},(\varphi(\alpha),\alpha)=(k_1,\cdots,k_n)A\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}$$

$$\alpha\neq 0\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\neq 0$$

$$\varphi\text{ 正定}\Longleftrightarrow(\varphi(\alpha),\alpha)>0\Longleftrightarrow(k_1,\cdots,k_n)A\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}\text{ 正定}$$

$\Longleftrightarrow A$ 正定

(7)反厄米特(反对称)矩阵 A 的特征根是零或纯虚数且若 $A_1(\alpha+\beta i)=bi(\alpha+\beta i)$, $\alpha,\beta\in R^n$. $A_1\in R^{n\times n}$, $A_1=-A_1'$, $b\neq 0$, $\alpha+\beta i\neq 0$, 则 $(\alpha,\beta)=0$, $|\alpha|=|\beta|$, 且当 $|\alpha+\beta i|=1$ 时, $|\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

证明 设 $A\eta=\lambda\eta$, $\overline{(A\eta)}'=\bar{\lambda}\bar{\eta}'$

$\bar{\eta}'A\eta=\bar{\eta}'(-\overline{A}')\eta=-\bar{\eta}'\overline{A}'\eta=-\overline{(A\eta)}'\eta=-\bar{\lambda}'\bar{\eta}'\eta$

又 $\bar{\eta}'A\eta=\bar{\eta}'\lambda\eta=\lambda\bar{\eta}'\eta$

$\therefore$ 有 $\lambda\bar{\eta}'\eta=-\bar{\lambda}\bar{\eta}'\eta$, $(\lambda+\bar{\lambda})\bar{\eta}'\eta=0$

$\because$ $\bar{\eta}'\eta\neq 0$, ($\because\eta\neq 0$)必 $\lambda+\bar{\lambda}=0$

即 $\lambda=0$ 或 λ 是纯虚数

$\because$ $A_1(\alpha+\beta i)=bi(\alpha+\beta i)$有$\begin{cases}A_1(\alpha)=-b\beta\\ A_1\beta=b\alpha,\end{cases}$, $L(\alpha,\beta)$ 是 A_1 的不变子空间, $\because(\alpha,A_1\alpha)=-(A_1\alpha,\alpha)$, $(A'_1=-A_1)$

$\therefore$ $(\alpha,A_1\alpha)=0$

$(\alpha,A_1\alpha)=(\alpha,-b\beta)=-b(\alpha,\beta)=0$

$b\neq 0$, 必 $(\alpha,\beta)=0$, 即 $\alpha\perp\beta$.

又 $0=(\beta,A_1\alpha)+(\alpha,A_1\beta)=(\beta,-b\beta)+(\alpha,b\alpha)$

$=-b(\beta,\beta)+b(\alpha,\alpha)=b(|\alpha|^2-|\beta|^2)$

$b\neq 0$, 必有 $|\alpha|^2-|\beta|^2=0$, 即得 $|\alpha|=|\beta|$

$|\alpha+\beta i|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2=2|\alpha|^2$

故 $|\alpha|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(8)设反对称矩阵 A(实的)的特征根为 $0,\cdots,0,\pm b_1 i$, $\cdots,\pm b_s i$, 则 A 的正交相似标准形为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & 0 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 0 & b_s \\ & & & & & & -b_s & 0 \end{pmatrix}$$

证明 由规范变换(矩阵)的性质 10 而得

下面通过例子说明求实反对称阵的正交相似标准型及其过渡阵的方法：

例 18 设实反对称阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

求 A 的正交相似标准型及其过渡正交阵.

解 计算出 A 的特征值是 $0;\sqrt{14}i;-\sqrt{14}i$.

则 A 的正交相似标准形是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{14} \\ 0 & -\sqrt{14} & 0 \end{pmatrix}=F$$

下面求正交阵 P，使 $P^{-1}AP=F$

① 求出 A 的属于特征值 0 的特征子空间 V_0 的标准正交基，这里是：$\alpha=(\frac{3}{\sqrt{14}},-\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}})$

②求出 A 的属于特征值$\sqrt{14}i$ 的特征值空间 $V_{\sqrt{14}i}$ 的标准正交基.

这里是：$\beta=u+vi$， $u,v\in R^n$

$$u=\left(\frac{3}{\sqrt{364}},\frac{13}{\sqrt{364}},\frac{2}{\sqrt{364}}\right)\quad v=\left(-\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{364}},0,\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{364}}\right)$$

③计算出：$\beta_1=\frac{2}{\sqrt{2}}u=\left(\frac{3}{\sqrt{182}},\frac{13}{\sqrt{182}},\frac{2}{\sqrt{182}}\right)$

$$\beta_2=\frac{2}{\sqrt{2}}v=\left(-\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{182}},0,\frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{182}}\right)$$

$L(u,v)=L(\beta_1,\beta_2)$是 A 的二维不变子空间.

④以 α,β_1,β_2 为列向量的矩阵 P 即为所求.

$$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{182}} & -\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{182}}\\ -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{13}{\sqrt{182}} & 0\\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{182}} & 3\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{182}}\end{pmatrix}$$

$P^{-1}AP=F$

例 19 设 A 是 n 阶实矩阵，则存在正交阵 Q 和 n 阶半正定阵 S_1,S_2，使 $A=QS_1=S_2Q$

证明 由命题 2 的推论 1)存在正交阵 Q_1,P_1，使

$$A=Q_1\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P_1,\quad (\text{秩 } A=r)$$

$$=Q_1P_1P_1^{-1}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P_1=QS_1$$

这里 $Q=Q_1P_1$ 是正交阵，S_1

$$=P_1^{-1}\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P_1$$ 是半正定的，同样亦可有：

$$A=Q_1\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}Q_1^{-1}Q_1P_1=S_2Q$$

这里 S_2 是半正定阵，$Q=Q_1P_1$

例 20　设 A 是规范阵，证明

①A 是厄米特矩阵$\Longleftrightarrow A$ 的特征根都是实数.

②A 是酉阵$\Longleftrightarrow A$ 的特征根的模是 1.

③A 是非奇异阵$\Longleftrightarrow A$ 的特征根都不是 0

④A 是幂等阵$\Longleftrightarrow A$ 的特征根只有 1 或 0

⑤若 A 又是幂等阵，则 A 是厄米特阵.

证明　①$\Longrightarrow$ 请读者自证

$\Longleftarrow A$ 有谱分解 $A=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r$

$\overline{A}'=\lambda_1\overline{P}'_1+\cdots+\lambda_r\overline{P}'_r$

$=\lambda_1P_1+\cdots+\lambda_rP_r$

其余请读者自证. 注意利用规范阵的谱分解性质.

第十章　双线性函数

双线性函数与内积空间，二次型有着密切的关系，它的进一步的发展，则是三重线性型，多重线性型，在数学、物理，工程科学等许多领域中有用.

一、线性函数

定义　设 V 是数域 P 上的一个线性空间，f 是 V 到 P 的一个映射，若 f 满足

(1) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$

(2) $f(k\alpha)=kf(\alpha)$

这里 α,β 是 V 中任意向量，k 是 P 中任意数，则称 f 为 V 上的一个线性函数，亦即 f 是 P 上线性空间 V 到空间 P 的线性映射.

例 1　设 $\alpha'=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in P^n$　则

$f(\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 是 P^n 到 P 的一个线性函数.

例 2　设 $A=(a_{ij})\in P^{n\times n}$　　则

$f(A)=\mathrm{tr}A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$ 是 $P^{n\times n}$ 到 P 的一个线性函数.

设 f 是空间 V 到 P 的一个线性函数. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基底，$f(\alpha_i)=a_i$，对于 V 中任意向量 α，有 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$　则 $f(\alpha)=k_1f(\alpha_1)+\cdots+k_nf(\alpha_n)=k_1a_1+\cdots$

$+k_na_n$. 即是 f 可由 V 的基的象确定.

反之,设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 P 中任意 n 个确定的数,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中的基底,则对于 V 中任意向量 α,

$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$, 令

$f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i$ 是 V 到 P 的一个线性函数.

即是,n 维线性空间 V 的一组基底 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 及 P 中任意 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可以唯一确定 V 到 P 的一个线性函数 f,使 $f(\alpha_i)=a_i$.

例 3 设 V 是数域 P 上 3 维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 V 的一组基底,f 是 V 上的一个线性函数,已知 $f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=1$,

$f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=-1$, $f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-3$, $\alpha\in V$,

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3$, 求 $f(\alpha)$

解 $\begin{cases} f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=1 \\ f(\varepsilon_2)-2f(\varepsilon_2)=-1 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=-3 \end{cases}$ 求得 $\begin{cases} f(\varepsilon_1)=4 \\ f(\varepsilon_2)=-7 \\ f(\varepsilon_3)=-3 \end{cases}$

则 $f(\alpha)=f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=4x_1-7x_2-3x_3$

例 4 V 及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 如上题,求线性函数 f,

使 $f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1-2\varepsilon_3)=0$, $f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1$,

解 由 $\begin{cases} f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_3)=0 \\ f(\varepsilon_1)-2f(\varepsilon_3)=0 \\ f(\varepsilon_1)+f(\varepsilon_2)=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} f(\varepsilon_1)=0 \\ f(\varepsilon_2)=1 \\ f(\varepsilon_3)=0 \end{cases}$

则 $\forall\ \alpha=(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)\in V$

$f(\alpha)=x_2f(\varepsilon_2)=x_2$,为所求.

二、对偶空间

设 V 是数域 P 上一个 n 维线性空间,$L(V,P)$ 表示 V 上全体

线性函数的集合. 在 $L(V,P)$ 中, 定义加法及数乘运算:

$\forall f,g\in L(V,P)$, $\alpha,\beta\in V$, $k,a,b,\in P$, 有

$(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$; $(kf)(\alpha)=k(f(\alpha))$.

可以验证: $(f+g)(k\alpha+t\beta)=k(f+g)(\alpha)+t(f+g)(\beta)$

$(kf)(a\alpha+b\beta)=a(kf)(\alpha)+b(kf)(\beta)$

则 $f+g$, kf 均属于 $L(V,P)$.

还可以证明: $L(V,P)$ 对于规定的加法及数乘做成 P 上的线性空间, 称为 V 的对偶空间(或共轭空间), 记为 V^*,

$V^*=L(V,P)=\mathrm{Hom}_P(V,P)$

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基底,

令 $f_i(\varepsilon_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

可以证明: f_i 是 V 上的线性函数.

$$\forall\ \alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\quad f_i(\alpha)=x_i$$

我们将证明: $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V^* 的一组基底.

首先, 若有 $k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0$, ($V^*$ 中零函数)

两端作用于 ε_i 得: $k_i=0, i=1,2,\cdots,n$. 即 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 在 P 上线性无关.

其次, 对于 V^* 中任意线性函数 g, 有 V 中任意向量 α,

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$, 则

$g(\alpha)=x_1g(\varepsilon_1)+x_2g(\varepsilon_2)+\cdots+x_ng(\varepsilon_n)$

$=f_1(\alpha)g(\varepsilon_1)+f_2(\alpha)g(\varepsilon_2)+\cdots+f_n(\alpha)g(\varepsilon_n)$

$=g(\varepsilon_1)f_1(\alpha)+g(\varepsilon_2)f_2(\alpha)+\cdots+g(\varepsilon_n)f_n(\alpha)$

$=[g(\varepsilon_1)f_1+g(\varepsilon_2)f_2+\cdots+g(\varepsilon_n)f_n](\alpha)$

故 $g=g(\varepsilon_1)f_1+g(\varepsilon_2)f_2+\cdots+g(\varepsilon_n)f_n$

因此，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V^* 的一组基底，称此基底为 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基，显然 V^* 的维数等于 V 的维数.

下面看一下，V 的两组基的对偶基之间的关系.

设 V 的两组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的对偶基分别为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 与 $g_1,g_2,\cdots,g_n$. 由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡阵为 A，我们看，由对偶基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 的过渡阵 B 是什么样的.

$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)A,\quad A=(a_{ij}),$

$(g_1,g_2,\cdots,g_n)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)B,\quad B=(b_{ij})$

$g_i(\eta_j)=(b_{1i}f_1+b_{2i}f_2+\cdots+b_{ni}f_n)(a_{1j}\varepsilon_1+a_{2j}\varepsilon_2+\cdots+a_{nj}\varepsilon_n)$

$$=b_{1i}a_{1j}+b_{2i}a_{2j}+b_{2i}a_{2j}+\cdots+b_{ni}a_{nj}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

($\because g_1,\cdots,g_n$ 是 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的对偶基) $i,j=1,2,\cdots,n$.

综合得到：$B'A=E$，故 $B=(A^{-1})'$

空间 V 中一个元素 α，可以定义 $V^*\longrightarrow P$ 的一个线性函数 α^{**}，$\alpha^{**}(f)=f(\alpha)$，$f\in V^*$.

可以证明，映射 $\varphi:\alpha\longrightarrow\alpha^{**}$ 是 V 到 V^{**} 的一个同构映射. 事实上，对于任意地 $f\in V^*$

$$\begin{aligned}\alpha,\beta\in V,\quad \varphi(\alpha+\beta)(f)&=(\alpha+\beta)^{**}(f)=f(\alpha+\beta)\\ &=f(\alpha)+f(\beta)=\alpha^{**}(f)+\beta^{**}(f)\\ &=(\alpha^{**}+\beta^{**})(f)\end{aligned}$$

故 $(\alpha+\beta)^{**}=\alpha^{**}+\beta^{**}$，同理 $(k\alpha)^{**}=k\alpha^{**}$

因此，V 与 V^* 是互为线性函数空间的，这正是对偶的意思.

例 5 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基，f_1,f_2,f_3 是它的对偶基. $\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3$，$\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，$\alpha_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3$，试证 α_1，α_2,α_3 是 V 的一组基，并求它的对偶基(用 f_1,f_2,f_3 表示)

解 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$ 是非退化的，故

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基，它的对偶基为

$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)(A^{-1})'$$

$$(A^{-1})'=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

例 6 设 V 是一个线性空间，$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V^* 中非零向量. 试证，存在 $\alpha\in V$，使 $f_i(\alpha)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,n$.

证明 f_i 的核 $\mathrm{Ker}f_i$ 是 V 的真子空间.

则 存在 $\alpha\in V$，使 $\alpha\overline{\in}\mathrm{Ker}f_i$，即 $f_i(\alpha)\neq 0$.

例 7 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间 V 中的非零向量，证明有 $f\in V^*$，使 $f(\alpha_i)\neq 0$，$i=1,2,\cdots,s$.

证明 令 $M_i=\{g\,|\,g(\alpha_i)=0\}$，$i=1,2,\cdots,s$.

可以证明 M_i 是 V^* 的真子空间.

则存在 $f\in V^*$，使 $f\overline{\in}M_i$. 所以 $f(\alpha_i)\neq 0$.

例 8 $V=P[x]_3$，对 $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^3\in V$，

定义 $f_1(p(x))=\int_0^1 p(x)d(x)$

$$f_2(p(x))=\int_0^2 p(x)d(x),$$

$$f_3(p(x))=\int_0^{-1} p(x)d(x).$$

试证 f_1,f_2,f_3 都是 V 上的线性函数，并找出 V 的一组基

$p_1(x),p_2(x),p_3(x)$，使 f_1,f_2,f_3 是它的对偶基.

解 验证 f_1,f_2,f_3 是 V 上的线性函数，

$$\begin{cases} p_1(x)= & 1 \quad +x-\dfrac{3}{2}x^2 \\ p_2(x)= & -\dfrac{1}{6} \quad\quad +\dfrac{1}{2}x^2 \\ p_3(x)= & \dfrac{1}{3} \quad -x+\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

例 9 设 V 是一个 n 维欧氏空间，它的内积为 (α,β)，对 V 中确定的向量 α，定义 V 上一个函数 α^* α^* $(\beta)=(\alpha,\beta)$，(1)证明 α^* 是 V 上的线性函数；(2)证明 V 到 V^* 的映射 $\alpha\longrightarrow\alpha^*$ 是 V 到 V^* 的一个同构映射，(在这个同构下，欧氏空间可看成自身的对偶
空间)

证明 $(1)\alpha^*(\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

$=\alpha^*(\beta_1)+\alpha^*(\beta_2)$

$\alpha^*(k\beta_1)=(\alpha,k\beta_1)=k(\alpha,\beta_1)=k\alpha^*(\beta_1)$

(2)$\forall\ \gamma\in V.$ $(\alpha+\beta)^*(\gamma)=(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

$=\alpha^*(\gamma)+\beta^*(\gamma)=(\alpha^*+\beta^*)(\gamma)$

故 $(\alpha+\beta)^*=\alpha^*+\beta^*$ 同理 $(k\alpha)^*=k\alpha^*$.

又 若 $\alpha^*=\beta^*$，$\alpha^*-\beta^*=(\alpha-\beta)^*=0$，$\forall\ \gamma\in V$

均有 $(\alpha-\beta)^*(\gamma)=(\alpha-\beta,\gamma)=0$，必有 $\alpha-\beta=0$

故 $\alpha=\beta$，因此是一个同构映射.

例 10 设 φ 是 P 上 n 维线性空间的一个线性变换.

(1)证明:对 V 上的线性函数 f,$f\varphi$ 仍是 V 上的线性函数

(2)定义 V^* 到自身的映射 φ^* 为 $f \longrightarrow f\varphi$,证明 φ^* 是 V^* 上的线性映射.

(3)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基,$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是它的对偶基.并设 φ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为 A,证明:φ^* 在 $f_1,\cdots,f_n$ 下的矩阵为 A'.(φ^* 称做 φ 的转置映射)

证明 (1)$\forall\ \alpha,\beta\in V$,

$f\varphi(\alpha+\beta)=f[\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)]=f\varphi(\alpha)+f\varphi(\beta)$

$f\varphi(k(\alpha))=f(k\varphi(\alpha))=kf\varphi(\alpha)$

故 $f\varphi$ 是 V 上的一个线性函数.

(2)$\forall\ f,g\in V^*$, $\alpha\in V$,

$\varphi^*(f+g)(\alpha)=(f+g)\varphi(\alpha)=f\varphi(\alpha)+g\varphi(\alpha)=(f\varphi+g\varphi)(\alpha)$

故 $\varphi^*(f+g)=f\varphi+g\varphi=\varphi^*(f)+\varphi^*(g)$

同理 $\varphi^*(kf)=k\varphi^*(f)$

故 φ^* 是 V^* 上的一个线性函数.

(3)设 $\alpha\in V$, $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$

$$\begin{aligned}\varphi^*(f_1)(\alpha)&=f_1\varphi(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n)\\&=f_1[x_1\varphi(\varepsilon_1)+x_2\varphi(\varepsilon_2)+\cdots+x_n\varphi(\varepsilon_n)]\\&=x_1a_{11}+x_2a_{12}+\cdots+x_na_{1n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[a_{11}f_1+a_{12}f_2+\cdots+a_{1n}f_n](\alpha)\\&=[a_{11}f_1+a_{12}f_2+\cdots+a_{1n}f_n](x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n)\\&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\end{aligned}$$

故 $\varphi^*f_1=f_1\varphi=a_{11}f_1+a_{12}f_2+\cdots+a_{1n}f_n$

同理 $\varphi^*f_i=f_i\varphi=a_{i1}f_1+a_{i2}f_2+\cdots+a_{in}f_n$

综合得到：$\varphi^*(f_1,f_2,\cdots,f_n)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)A'$

例 11　设 V 是 P 上一个线性空间，$f_1,f_2,\cdots,f_k$ 是 V 上 k 个线性函数.

(1)证明下列集合 $W=\{\alpha\in V\mid f_i(\alpha)=0,i=1,2,\cdots,k\}$

是 V 的一个子空间，W 称为线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 的零化子空间.

(2)证明：V 的任一子空间均为某些线性函数的零化子空间.

证明　(1)$\forall\ \alpha,\beta\in W$

$f_i(\alpha+\beta)=f_i(\alpha)+f_i(\beta)=0,\quad \alpha+\beta\in W$

同理 $k\alpha\in W$，故 W 是 V 的子空间

(2)V 的任意子空间　$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\gamma)$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\gamma$ 线性无关，将其扩展成 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，其对偶基 $g_1,g_2,\cdots,g_n$.

则　W_1 是 $g_{r+1},g_{r+2},\cdots,g_n$ 的零化子空间.

三、双线性函数

定义 1　设 V 是数域 P 上的线性空间，f 是 $V\times V$ 到 P 的映射：若对于任意的 V 中的元素 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\beta_1,\beta_2$ 及 P 中的数 k_1,k_2，均有：

(1)$f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$

(2)$f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$

称 $f(\alpha,\beta)$是 V 上的一个双线性函数.

欧氏空间中的内积就是该空间上的一个双线性函数.

线性空间 V 上的一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$，当固定一个向量 α(或 β)不变时，可以给出一个线性函数.

另一方面，V 上的两个线性函数 f_1 与 f_2，可以造出一个 V 上的双线性函数 $f(\alpha,\beta)=f_1(\alpha)f_2(\beta)$

证明 $f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=f_1(\alpha)f_2(k_1\beta_1+k_2\beta_2)$

$$=f_1(\alpha)[k_1f_2(\beta_1)+k_2f_2(\beta_2)]$$

$$=k_1f_1(\alpha)f_2(\beta_1)+k_2f_1(\alpha)f_2(\beta_2)$$

$$=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)$$

同理， $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$.

定义 2 设 $f(\alpha,\beta)$是线性空间 V 上的一个双线性函数，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基底，令 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij}$，则称 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$. 为双线性函数 $f(\alpha,\beta)$在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵.

命题 1 线性空间 V 上的双线性函数空间与方阵空间 $P^{n\times n}$ 同构.

证明 取定 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

令 双线性函数 $f(\alpha,\beta)\longrightarrow A=(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))$. 则此对应是 V 上双线性函数集合到 $P^{n\times n}$上的一一对应：

任取 $B\in P^{n\times n}$， $\alpha,\beta\in V$

$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$， $\beta=y_1\varepsilon_1+y_2\varepsilon_2+\cdots+y_n\varepsilon_n$

则 $g(\alpha,\beta)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 是 V 上的一个双线性函数，并且 若有

$f\longrightarrow A$， $g\longrightarrow B$，

当 $A=B$ 时， $f(\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta)$

令 $(f+g)(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta)+g(\alpha,\beta)$

$(kf)(\alpha,\beta)=k[f(\alpha,\beta)]$

可以验证 两个双线性函数的和及数乘双线性函数仍是双线性函数.

$(f+g)(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=f(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)+g(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)$

$=k_1f(\alpha,\beta_1)+k_2f(\alpha,\beta_2)+k_1g(\alpha,\beta_1)+k_2g(\alpha,\beta_2)$

$=k_1(f+g)(\alpha,\beta_1)+k_2(f+g)(\alpha,\beta_2)$

同理$(f+g)(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)$

$=k_1(f+g)(\alpha_1,\beta)+k_2(f+g)(\alpha_2,\beta)$

故 $(f+g)(\alpha,\beta)$是V上的双线性函数.

同理$(k\ f)(\alpha,\beta)$亦是V上的双线性函数.

并且,$(f+g)(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)+g(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$.

$f+g \longrightarrow A+B$,

$kf \longrightarrow kA$.

因此,双线性函数空间与方阵空间同构.

命题 2 n维线性空间V上的同一个双线性函数$f(\alpha,\beta)$在V的不同的基底下的矩阵是合同的.

证明 $f(\alpha,\beta)$在V的基底$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$及$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$下的度量矩阵分别为$A,B$.

$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C$

$\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)X=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X_1$

$\beta=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)Y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Y_1$

$X=CX_1,Y=CY_1$

$f(\alpha,\beta)=X'AY=(CX_1)'ACY_1=X'_1C'ACY_1$

$f(\alpha,\beta)=X'_1BY_1$, 故 $B=C'AC$

这样，若是矩阵 G 与 D 合同，则存在一个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 及 V 的两组基底，使得 $f(\alpha,\beta)$ 在这两组基底下的矩阵分别为 G 与 D.

定义 3 设 $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间 V 上的一个双线性函数，如果对于任意的 $\beta\in V$，从 $f(\alpha,\beta)=0$ 可推出 $\alpha=0$，则称 f 是非退

化的.

定义 4 设 $f(\alpha,\beta)$ 是线性空间 V 上的一个双线性函数，令 $\mathrm{Ker}\ f=\{\alpha\,|\,f(\alpha,\beta)=0,\quad \forall\ \beta\in V\}$ 称 $\mathrm{Ker}\ f$ 为 $f(\ ,\beta)$ 的核.

命题 3 双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的充要条件是它的度量阵是非退化的.

证明 设 $f(\alpha,\beta)$ 在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量阵为 A，

$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X,\quad \beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y,\quad f(\alpha,\beta)=X'$
AY.

若是 $f(\alpha,\beta)=X'AY=0$，对于任意地 $\beta\in V$ 均成立，即对于任意地 Y 均有 $X'AY=0$，必有 $X'A=0$，$A'X=0$ 只有零解的充分必要条件是 A 是非退化的.

推论 $\forall\ \alpha\in V$，由 $f(\alpha,\beta)=0$ 可推出 $\beta=0$，则 f 是非退化的.

命题 4 双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的充要条件是

$\mathrm{Ker}\ f$ 是 V 的零子空间.

证明 若 $\mathrm{Ker}\ f\neq\{0\}$ 存在 $\alpha\neq0$，$\alpha\in\mathrm{Ker}\ f$，即 $\forall\ \beta\in$
V，

$f(\alpha,\beta)=0$，则 $f(\alpha,\beta)$ 是退化的，矛盾.

例 12 设 $A\in P^{m\times n}$ 定义 $P^{m\times n}$ 上一个二元函数，

$f(X,Y)=\mathrm{tr}(X'AY)$, $X,Y\in P^{m\times n}$

(1)证明 $f(X,Y)$是 $P^{m\times n}$上的双线性函数

(2)求 $f(X,Y)$在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},E_{21},E_{22},\cdots,E_{2n}\cdots,E_{m1},E_{m2},\cdots,E_{mn}$下的度量矩阵

证明 (1)证略

(2)$f(E_{ij},E_{kt})=\begin{cases}a_{ik} & (j=t)\\ 0 & (j\neq t)\end{cases}$

度量阵为$\begin{pmatrix}a_{11}E_n,a_{12}E_n,\cdots,a_{1n}E_n\\ a_{21}E_n,a_{22}E_n,\cdots,a_{2n}E_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}E_n,a_{m2}E_n,\cdots,a_{mn}E_n\end{pmatrix}$

E_n 为 n 阶单位矩阵.

例 13 在 P^4 中定义一个双线性函数 $f(X,Y)$,对于

$X'=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $Y'=(y_1,y_2,y_3,y_4)$,

$f(X,Y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$

(1)给定 P^4 的一组基

$\varepsilon'_1=(1,-2,-1,0)$, $\varepsilon'_2=(1,-1,1,0)$

$\varepsilon'_3=(-1,2,1,1)$, $\varepsilon'_4=(-1,-1,0,1)$

求 $f(X,Y)$在这组基下的度量阵.

(2)另取一组基

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

求 $f(X,Y)$在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量阵.

解 (1)

$$A=\begin{pmatrix}4 & 7 & -5 & -14\\ -2 & 2 & 2 & -7\\ 0 & -11 & 1 & 14\\ 15 & 4 & -15 & -2\end{pmatrix}$$

(2)

$$B=T'AT=\begin{pmatrix}-6 & 46 & 8 & 24\\ -18 & 26 & 16 & -72\\ -2 & -38 & 0 & 0\\ -6 & 86 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

四、对称(反对称)双线性函数

定义 1 设 $f(\alpha,\beta)$是线性空间 V 上的一个双线性函数,若对于 V 中任意向量 α,β 均有

$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$, $(f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha))$称 $f(\alpha,\beta)$为对称(反对称)双线性函数.

命题 1 数域 P 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数

$f(\alpha,\beta)$是对称(反对称)双线性函数的充分必要条件是在 V 的任意一组基底下的度量矩阵是对称(反对称)矩阵.

证明 任取 V 的一组基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$, $\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)Y$, $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=a_{ij}$, $A=(a_{ij})$

则 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)\Longleftrightarrow X'AY=Y'AX\Longleftrightarrow f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)\Longleftrightarrow a_{ij}=a_{ji}\Longleftrightarrow A=A'$

同样,$f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)\Longleftrightarrow f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-f(\varepsilon_j,\varepsilon_i)$
$\Longleftrightarrow$

$X'AY=-Y'AX\Longleftrightarrow Y'A'X=-Y'AX\Longleftrightarrow A'=-A$

命题 2 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间,$f(\alpha,\beta)$是 V 上

对称双线性函数，则存在 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，使 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下的度量阵是对角阵.

证明 取 V 的一组基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

$f(\alpha,\beta)$ 在此基下的度量阵 A 是对称阵，

存在非退化 n 阶阵 C，使 $C'AC$ 为对角阵.

则基底 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$ 为所求.

命题 3 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 上的反对称线性函数，则存在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 使 $f(\alpha,\beta)$ 在此基下的度量阵为

$$G=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

证明 取 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，

$f(\alpha,\beta)$ 在此基下的度量阵为 A， $A'=-A$. 则存在非退化阵 S，使 $S'AS=G$.

故 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)S$ 为所求.

推论 1 设 $f(\alpha,\beta)$ 是复数域上 n 维线性空间 V 上对称双线性函数，则存在 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 使

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X,\quad \beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Y.$$

$$f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{r}x_iy_i,\quad r=\text{秩}(f(\varepsilon_i,\varepsilon_j))$$

推论 2 设 $f(\alpha,\beta)$是实数域上 n 维线性空间 V 的对称双线性函数，则存在 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 使对于 V 中任意向量.

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\quad \beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i \quad 均有$$

$$f(\alpha,\beta)=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ry_r$$

r 是 $f(\alpha,\beta)$在此基下度量阵的秩，p 是正惯性指标，$r-p$ 是负惯性指标，$2p-r$ 是符号差.

命题 4 设 $f(\alpha,\beta)$是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数，则 $f(\alpha,\beta)$可以唯一的分解为 V 上的一个对称双线性函数与一个反对称双线性函数之和.

证明 取 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$. $f(\alpha,\beta)$在此基下的度量阵为 A

则 A 可唯一分解为对称阵 S 与反对称阵 K 之和.

$$S=\frac{1}{2}(A+A'),\quad K=\frac{1}{2}(A-A'),\quad A=S+K.$$

S 的原象，$\varphi(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}f(\alpha,\beta)+\frac{1}{2}f(\beta,\alpha)$是对称双线性函数.

K 的原象，$g(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}f(\alpha,\beta)-\frac{1}{2}f(\beta,\alpha)$是反对称双线性函数.

并且 $f(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha,\beta)+g(\alpha,\beta)$.

定义 2 线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 当 $\alpha=\beta$ 时，导出一个二次齐式函数 $f(\alpha,\alpha)$.

不同的双线性函数可能导出同一个二次齐式函数，

例如，设两个双线性函数 $f(\alpha,\beta)$，$g(\alpha,\beta)$在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量阵为 A 与 B.

$A\neq B$, 但可 $a_{ij}+a_{ji}=b_{ij}+b_{ji}$

例如，$f(\alpha,\beta)$与 $g(\alpha,\beta)$是 3 维空间 V 上的双线性函数，在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的度量阵分别为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ 及 } B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$A\neq B$, $f(\alpha,\beta)\neq g(\alpha,\beta)$，但 $f(\alpha,\beta)$与 $g(\alpha,\beta)$导出的二次齐式(二次型)是同一个.

一个对称双线性函数只能导出一个二次型.

对称双线性函数空间与对称阵空间同构，后者又与二次型空间同构.

定义 3 实线性空间 V 上的双线性函数 $f(\alpha,\beta)$，导出的实二次型 $f(\alpha,\alpha)$，当 $\alpha\in V$, $\alpha\neq 0$ 时，$f(\alpha,\alpha)>0$,

($\geqslant 0$、<0、$\leqslant 0$)时，称二次型 $f(\alpha,\alpha)$为正定(半正定、负定、半负定)的.

例 14 设 V 是复数域上线性空间，其维数 $n\geqslant 2$，$f(\alpha,\beta)$是 V 上一个对称双线性函数.

(1)证明 V 中有非零向量 ξ，使 $f(\xi,\xi)=0$

(2)如果 $f(\alpha,\beta)$是非退化的，则必有线性无关的向量 ξ，η，满足 $f(\xi,\eta)=1$, $f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0$

证明 (1)存在 V 中向量 α,β 线性无关. 若 $f(\alpha,\alpha)=0$，即 $\xi=\alpha$，证完. 否则，$f(k\alpha+\beta,k\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)k^2+2f(\alpha,\beta)k+f(\beta,\beta)=0$，有解，则 $\xi=k\alpha+\beta$ 为所求

(2)存在 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 使对于任意的 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，

$\beta=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i$ 有 $f(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{r}x_iy_i$

取$\xi=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}1\\i\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$,

$\eta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}0\\-i\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$

显然,ξ,η 线性无关,$f(\xi,\eta)=1$, $f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0$

例 15 试证:线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称的充要条件是:对任意 $\alpha\in V$,都有 $f(\alpha,\alpha)=0$

证明 $\Longrightarrow f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha)$,故 $f(\alpha,\alpha)=0$

$\Longleftarrow f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)=0$

$\therefore\quad f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$

定义 4 设 $f(\alpha,\beta)$是线性空间 V 上对称或反对称双线性函数,若 $\alpha,\beta\in V$,$f(\alpha,\beta)=0$,称 α 与 β 正交. 若 V 上定义了一个非退化双线性函数,则称 V 为一个双线性度量空间.

命题 5 设 $f(\alpha,\beta)$是 V 上对称或反对称双线性函数,W 是 V 的一个真子空间,证明,对于 $\xi\overline{\in} W$,必有 $\eta\in W+L(\xi)$,使 $f(\eta,\alpha)=0$,对所有 $\alpha\in W$ 均成立.

证明 (1)若 $f(\alpha,\beta)$是 V 上对称双线性函数. 限制在 W $f(\alpha,\beta)$亦是 W 上的对称双线性函数,则存在 W 的一组基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$,使 $f(\alpha,\beta)$在此基下的矩阵是对角阵,对角线上

元素为

$f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)$，若 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 W 上是非退化的，则

$f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,m$. 取

$$\eta=\xi-\frac{f(\xi,\varepsilon_1)}{f(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\frac{f(\xi,\varepsilon_2)}{f(\varepsilon_2,\varepsilon_2)}\varepsilon_2-\cdots-\frac{f(\xi,\varepsilon_m)}{f(\varepsilon_m,\varepsilon_m)}\varepsilon_m$$

有 $\eta\in W+L(\xi)$，并且对于任意地 $\alpha\in W$，

$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m$，均有 $f(\eta,\alpha)=0$.

若 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 W 上是退化时，必有 $f(\varepsilon_m,\varepsilon_m)=0$，这时取 $\eta=\varepsilon_m$ 即可.

(2)若 $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上反对称双线性函数

当 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 W 上是非退化反对称双线性函数，存在 W 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_{-1},\varepsilon_2,\varepsilon_{-2}\cdots,\varepsilon_t,\varepsilon_{-t}$ 使 $f(\alpha,\beta)$ 在此基下的度量阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $\eta=\xi-\dfrac{f(\xi,\xi_1)}{(\varepsilon_1,\varepsilon_{-1})}\varepsilon_{-1}+\dfrac{f(\xi,\varepsilon_{-1})}{f(\varepsilon_{-1},\varepsilon_1)}\varepsilon_1-\cdots-\dfrac{f(\xi,\varepsilon_t)}{f(\varepsilon_t,\varepsilon_{-t})}\varepsilon_{-t}$.

$+\dfrac{f(\xi,\varepsilon_{-t})}{f(\varepsilon_{-t},\varepsilon_t)}\varepsilon_t$

对于任意的 $\alpha\in W$ 均有 $f(\eta,\alpha)=0$，当 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 W 上是退化时，有 $f(\varepsilon_t,\varepsilon_t)=0$

$f(\varepsilon_t,\varepsilon_j)=0,\quad j=1,-1,2,-2,\cdots,t,-t$.

命题 6 设 V 与 $f(\alpha,\beta)$ 同命题 5. K 是 V 的一个子空

间，令 $K^{\perp}=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\quad \forall\ \beta\in K\}$

(1)试证 $K^{\perp}$是子空间(称为 K 的正交补空间)

(2)试证，如果 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$，则 $V=K+K^{\perp}$

证明　(1)容易验证 $K^{\perp}$是子空间.

(2)若 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$，则对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$限制在 K 上是非退化的. 否则设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 为 K 的基，$f(\alpha,\beta)$在此基下的度量阵为 A_1，$|A_1|=0$，齐次线性方程组 $A_1X=0$ 有非零解：

$$[\gamma]=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_\gamma\end{pmatrix},0\neq\gamma=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_\gamma)[\gamma]\in K.$$

$\forall\ \beta\in K$，　$f(\beta,\gamma)=[\beta]'A_1[\gamma]=0$，　故 $\gamma\in K^{\perp}$

此与 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$矛盾. 因此，A_1 非退化，

又，$\forall\ \alpha\in V$

$$A_1X=\begin{pmatrix}f(\alpha,\varepsilon_1)\\\vdots\\f(\alpha,\varepsilon_\gamma)\end{pmatrix},\quad \text{有唯一解}[\eta]=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\\vdots\\t_r\end{pmatrix}$$

令，$\eta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_\gamma)[\eta]$，则有

$f(\varepsilon_i,\alpha-\eta)=f(\varepsilon_i,\alpha)-f(\varepsilon_i,\eta)=f(\varepsilon_i,\alpha)-f(\alpha,\varepsilon_i)=0.$

故 $\alpha-\eta\in K^{\perp}$，因此，$\alpha=\eta+(\alpha-\eta)$. 即是有 $V=K+K^{\perp}$.

当 $f(\alpha,\beta)$为反对称双线性函数时，类似的改为：

$$A_1X=\begin{pmatrix}f(\varepsilon_1,\alpha)\\\vdots\\f(\varepsilon_r,\alpha)\end{pmatrix},\quad \text{有唯一解}[\eta]$$

$f(\alpha-\eta,\varepsilon_i)=-f(\varepsilon_i,\alpha-\eta)=-[f(\varepsilon_i,\alpha)-f(\varepsilon_i,\eta)]=0$

同样有，$\alpha-\eta\in K^{\perp}$， $\alpha=\eta+(\alpha-\eta)$， $V=K+K^{\perp}$.

例 16 设 $f(\alpha,\beta)$ 为 n 维线性空间 V 上的对称双线性函数，

$V^{\perp}=\{\alpha\mid f(\alpha,\beta)=0,\quad \forall\ \beta\in V\}$ $f(\alpha,\beta)$ 的度量阵 A 的秩为 r. 则 $V^{\perp}$ 的维数为 $n-r$，且存在维数为 r 的子空间 W. 使

$$V=V^{\perp}\oplus W$$

证明 取 V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$， $f(\alpha,\beta)$ 在此基底下的度量阵 A 的秩为 r， $\forall\ \alpha\in V^{\perp}$， $\beta\in V$，

$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)[\alpha]$， $\beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)[\beta]$

则有，$f(\alpha,\beta)=[\alpha]'A[\beta]=0$，可得 $[\alpha]'A=0$.

设方程组 $A[\alpha]=0$ 的基础解系：$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$.

令 $\eta_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\xi_i$， $i=1,2,\cdots,n-r$.

则 $V^{\perp}=L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r})$， 令 $A=([\alpha_1],\cdots,[\alpha_n])$

$\alpha_i=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)[\alpha_i]$

故 $W=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关部分组.

有，$V=V^{\perp}\oplus W$

$\forall\ \alpha\in V^{\perp}$， $\gamma\in W$， $\alpha=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$

$[\alpha]=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$

$f(\alpha,\gamma)=f(\gamma,\alpha)=[\gamma]A(k_1\xi_1+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r})=0$

例 17 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 上非退化对称双线性函数，对 V 中一个元素 α，定义 V^* 中一个元素 α^*：

$\alpha^*(\beta)=f(\alpha,\beta)$， $\beta\in V$.

试证：(1) V 到 V^* 的映射：$\alpha\longrightarrow\alpha^*$ 是一个同构映射

(2) 对 V 的每组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 有 V 的唯一的一组基 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$， 使 $f(\varepsilon_i,\varepsilon_j')=\delta_{ij}$

(3)如果 V 是复数域上 n 维线性空间，则有一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 使 $\eta_i=\eta_i'$，　$i=1,2,\cdots,n$

证明　(1)$\alpha\longrightarrow\alpha^*$，　$\beta\longrightarrow\beta^*$

若有 $\alpha^*=\beta^*$，即$\forall\ \gamma\in V,\alpha^*(\gamma)=\beta^*(\gamma)$

$f(\alpha,\gamma)=f(\beta,\gamma)$，　$f(\alpha-\beta,\gamma)=0$

因，$f(\alpha,\beta)$在 V 上非退化，故 $\alpha-\beta=0,\alpha=\beta$. 即此映射是

单射.

又，$(\alpha+\beta)^*(\gamma)=f(\alpha+\beta,\gamma)=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)$
$=\alpha^*(\gamma)+\beta^*(\gamma)=(\alpha^*+\beta^*)(\gamma)$

故，$(\alpha+\beta)^*=\alpha^*+\beta^*$，同理，$(k\alpha)^*=k\alpha^*$.

又因 V 与 V^* 的维数相同，所以是同构映射.

(2)V 的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$. 因，V 与 V^* 同构，故，存在 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 使

$f_i=\varepsilon'^*$，　$i=1,2,\cdots,n$

而，$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j')=f(\varepsilon_j',\varepsilon_i)=(\varepsilon_j')^*(\varepsilon_i)=f_j(\varepsilon_i)=\delta_{ji}$

$$=\begin{cases}1 & (j=i)\\ 0 & (j\neq i)\end{cases}$$

(3)因 $f(\alpha,\beta)$是复数域上空间 V 上的非退化对称双线性函数. 则存在 V 的一组基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 使 $f(\alpha,\beta)$的度量阵是单位阵 E，存在 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 的对偶基 $g_1,g_2,\cdots,g_n$

由(2)$g_i=\eta_i'$　，$g_i(\eta_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$

故 $g_i=\eta_i$，因 V 与 V^*同构

故 $\eta_i=\eta_i'$，　$i=1,2,\cdots,n$

五、伪欧氏空间

定义 设 V 是实线性空间，$f(\alpha,\beta)$是 V 上非退化对称双线性函数(可看作“内积”)，称 V 为一个伪欧氏空间.

若有伪欧氏空间 V 的一组基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

满足：$f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=1,\quad i=1,2,\cdots,r$

$$f(\varepsilon_j,\varepsilon_j)=-1,j=r+1,r+2,\cdots,n$$

$$f(\varepsilon_k,\varepsilon_t)=0,\quad k,t=1,2,\cdots,n,\quad k\neq t.$$

则称此基为伪欧氏空间 V 的一组伪正交基.

如果 V 上的线性变换 φ,使对于任意的 $\alpha,\beta\in V$,均有：$f(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=f(\alpha,\beta)$,则称 φ 为 V 的一个伪正交变换.

命题 1 n 维伪欧氏空间 V 的任一组基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 均可改造成为伪正交基.

证明 非退化对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的度量阵为 A,则存在非退化阵 C,使

$$C'AC=\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p}\end{pmatrix}=F$$

则 $f(\alpha,\beta)$在基$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)C$ 下的度量阵为 F. 故，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的伪正交基.

命题 2 伪欧氏空间 V 中的伪正交变换 φ 是可逆的，且其逆变换也是伪正交变换.

证明 因 V 上 $f(\alpha,\beta)$是非退化的，所以，若 $\alpha\neq 0$,存在 β,使

$f(\alpha,\beta)\neq 0$,于是，$f(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))=f(\alpha,\beta)\neq 0$,得

$\varphi(\alpha)\neq 0$,即 φ 的核是零空间，故 φ 是单射，是满射. 因而 φ 是可逆的.

$$f(\varphi^{-1}(\alpha),\varphi^{-1}(\beta))=f(\varphi[\varphi^{-1}(\alpha)],\varphi[\varphi^{-1}(\beta)])$$

$=f(\alpha,\beta)$. 即 φ^{-1}亦是伪正交变换.

命题 3 伪正交变换的乘积仍是伪正交变换.

证明 设 φ,ψ 是 V 的伪正交变换.

则, $\forall\ \alpha,\beta\in V$

$$f(\varphi\psi(\alpha),\varphi\psi(\beta))=f(\psi(\alpha),\psi(\beta))=f(\alpha,\beta)$$

命题 4 伪正交变换 φ 把伪正交基变为伪正交基，伪正交变换 φ 在伪正交基下的矩阵 T 满足

$$T'\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_{n-p}\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_{n-p}\end{pmatrix}$$

证明 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组伪正交基.

$f(\alpha,\beta)$在此基下的度量阵为$\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_{n-p}\end{pmatrix}$

设 $\varphi(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)T$，因 φ 是可逆的，故 $\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n)$是 V 的基.

由于, $f(\varphi(\varepsilon_i),\varphi(\varepsilon_j))=f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$

因此, $\varphi(\varepsilon_1),\varphi(\varepsilon_2),\cdots,\varphi(\varepsilon_n)$是 V 的伪正交基.

$f(\alpha,\beta)$在此基下的度量阵为：

$$T'\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_{n-p}\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix}E_p & \\ & -E_{n-p}\end{pmatrix}$$

~~**命题 5** 伪正交变换的特征值为 1 或 −1.~~

证明 $\varphi(\alpha)=\lambda\alpha$,

$$f(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))=f(\lambda\alpha,\lambda\alpha)=\lambda^2 f(\alpha,\alpha)$$

又 $f(\varphi(\alpha),\varphi(\alpha))=f(\alpha,\alpha)$， 故 $\lambda^2=1$， $\lambda=\pm1$.

例 18 $f(\alpha,\beta)$是线性空间 V 上对称双线性函数, $f(\alpha,\beta)$限制在子空间 K 上是非退化的，试证 $V=K\oplus K^{\perp}$的充分必

要条件是

$f(\alpha,\beta)$在V上非退化的.

证明　$f(\alpha,\beta)$限制在K上是非退化的，由前节命题6，$K\cap K^{\perp}=\{0\}$时，$V=K+K^{\perp}$，且是$V=K+K^{\perp}$. 但，$K\subseteq(K^{\perp})^{\perp}$，因$\dim K+\dim K^{\perp}=n$，$K\cap K^{\perp}=\{0\}$，故$(K^{\perp})^{\perp}=K$. 又由前节命题6，$f(\alpha,\beta)$限制在$K^{\perp}$上是非退化的. 存在$K$的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$使

$f(\alpha,\beta)$在此基下的度量阵A_1是非退化的.

同样存在$K^{\perp}$的基$\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_n$使$f(\alpha,\beta)$在此基下的度量阵$A_2$是非退化的.

则$f(\alpha,\beta)$在V的基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\varepsilon_{r+2},\cdots,\varepsilon_n$下的度量阵为$\begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}$亦是非退化的，因而$f(\alpha,\beta)$在$V$上是非退化的.

反之，$f(\alpha,\beta)$在V上是非退化的，$f(\alpha,\beta)$限制在K上是非退化的，若$\gamma\in K\cap K^{\perp}$.

$\gamma=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r)[\gamma]$，　$[\gamma]\in R^r$，　$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$为$K$的基，

$f(\alpha,\beta)$关于$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$的度量阵为$A_1$，

则$\forall\ \beta\in K$，　$f(\beta,\gamma)=[\beta]'A_1[\gamma]=0$，必有$[\gamma]=0$，

即有$\gamma=0$，因而有$K\cap K^{\perp}=\{0\}$

由前节命题6的证明，可知$V=K+K^{\perp}$.

例19　设f是n维欧氏空间V上的一个线性函数，则存在向量$\beta\in V$，使$\forall\ \alpha\in V$，均有$f(\alpha)=(\alpha,\beta)$.

证明　设V的基底$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$.

$\beta=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n$.

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1)=(\varepsilon_1,\beta)=x_1(\varepsilon_1,\varepsilon_1)+x_2(\varepsilon_1,\varepsilon_2)+\cdots+x_n(\varepsilon_1,\varepsilon_n) \\ f(\varepsilon_2)=(\varepsilon_2,\beta)=x_1(\varepsilon_2,\varepsilon_1)+x_2(\varepsilon_2,\varepsilon_2)+\cdots+x_n(\varepsilon_2,\varepsilon_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\varepsilon_n)=(\varepsilon_n,\beta)=x_1(\varepsilon_n,\varepsilon_1)+x_2(\varepsilon_n,\varepsilon_2)+\cdots+x_n(\varepsilon_n,\varepsilon_n) \end{cases}$$

因 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量阵非退化，故上面的线性方程组有唯一解. 即存在 β，对于任意地 α，

$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n$.

$f(\alpha)=k_1f(\varepsilon_1)+k_2f(\varepsilon_2)+\cdots+k_nf(\varepsilon_n)$

$$=(k_1,k_2,\cdots,k_n)\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) \\ \vdots \\ f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}=(k_1,\cdots,k_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\alpha,\beta).$$

例 20 设 $f(\alpha,\beta)$是 n 维欧氏空间 V 上的一个双线性函数，则存在 V 的线性变换 φ，使 $f(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha),\beta)$.

证明 固定 β，则 $f(\alpha,\beta)$是一个线性函数，故由上例存在 $\gamma\in V$，使 $f(\alpha,\beta)=(\alpha,\gamma)$.

令变换 ψ： $\psi(\beta)=\gamma$，则

$f(\alpha,\beta_1)=(\alpha,\gamma_1)=(\alpha,\psi(\beta_1))$

$f(\alpha,\beta_2)=(\alpha,\gamma_2)=(\alpha,\psi(\beta_2))$

$f(\alpha,\beta_1+\beta_2)=f(\alpha,\beta_1)+f(\alpha,\beta_2)=(\alpha,\gamma_1)+(\alpha,\gamma_2)$
$=(\alpha,\gamma_1+\gamma_2)$

即 $\psi(\beta_1+\beta_2)=\psi(\beta_1)+\psi(\beta_2)$

同理 $\psi(k\beta)=k\psi(\beta)$，即 ψ 是线性变换，故存在 ψ 的共轭变换 $\psi^*=\varphi$，使

$(\alpha,\psi(\beta))=(\psi^*(\alpha),\beta)=(\varphi(\alpha),\beta)$

因此，$f(\alpha,\beta)=(\varphi(\alpha),\beta)$.

总练习题

1. 试求所有适合下式的非零复多项式 $f(x)$：

$f(f(x))=[f(x)]^n$、 n 是正整数

2. 给定 n 个非零实系数多项式 $a_{11}(x),\cdots,a_{1n}(x)$. 设它们的最大公因式为 $d(x)$. 试证：对一切 $n\geqslant 2$. 存在 $(n-1)n$ 个多项式 $Q_{ij}(x)$， $2\leqslant i\leqslant n$， $1\leqslant j\leqslant n$ 使得

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x)\cdots & a_{1n}(x) \\ Q_{21}(x) & Q_{22}(x)\cdots & Q_{2n}(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Q_{n1}(x) & Q_{n2}(x)\cdots & Q_{nn}(x) \end{bmatrix}=d(x)$$

3. 设 $f(x)$是一个复系数三次多项式，α 与 β 是两虚数. $\alpha\neq\beta,\bar{\beta}$. 已知 $f\overline{(\alpha)}=\overline{f(\alpha)}$， $f(\bar{\beta})=\overline{f(\beta)}$. 证明 $f(x)$是实系数多项式.

4. 设 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是实数. 给出存在一个次数不超过 2 的实系数多项式 $f(x)$使得 $f(-1)=\alpha$， $f(1)=\beta$， $f(3)=\gamma$. $f(0)=\delta$ 的充要条件.

5. 设 m 是大于 1 的正整数. $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m-1}x^i$ 且 $f(x)$能整除 $f(x^m)+C$ 求常数 C.

6. 设 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$是次数不超过 $n-2$ 的多项式. 求证对任意 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

7. 若 $f(x)|f(x^n)$. n 为正整数，则 $f(x)$ 的根是零或单位根.

8. $(f(x),g(x))=1$，则 $(f(x)h(x),g(x))$ $=(h(x),g(x))$

9. 设 $f(x),g(x)\in P[x]$

则 $f^2(x)|g^2(x) \Longleftrightarrow f(x)|g(x)$

10. 设 $f(x)=(5x-4)^{1985}(4x^2-2x-1)^{1986}$ $(8x^3-11x^2+2)^{1987}$

试求 $f(x)$ 所有系数的和.

11. $f(x)\in Q[x]$, $f(x)\neq 0$

$g(x)\in Q[x]$, $\partial(g(x))=n\geqslant 1$，其根为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

求证 $f(\alpha_1)f(\alpha_2)\cdots f(\alpha_n)\in Q$

12. 设 $f(x)\in R[x]$，且 $f(x)$ 无实数，则 $f(x)$ 可 以分解为两个实数域上多项式的平方和.

13. 计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & & & & \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & & & \\ & -1 & 1-b_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1-b_{n-1} & b_n \\ & & & & -1 & 1-b_n \end{vmatrix} \text{(空处为 0)}$$

;

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1-x & & & \\ & & 2-x & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n-x \end{vmatrix} \text{(空处为 1)}$$

$$=(-1)^n x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$$\begin{vmatrix} x-a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & x-a_2^2 & -a_2a_3 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & -a_na_3 & \cdots & x-a_n^2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a & \cdots & a \\ b & c & d & d & \cdots & d \\ b & d & c & d & \cdots & d \\ b & d & d & c & \cdots & d \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & d & d & d & \cdots & c \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & y & y & \cdots & y \\ y & a_2 & y & \cdots & y \\ y & y & a_3 & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 2^n-2 & 2^{n-1}-2 & \cdots & 2^3-2 & 2 \\ 3^n-2 & 3^{n-1}-3 & \cdots & 3^3-3 & 6 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n^n-n & n^{n-1}-n & \cdots & n^3-n & n^2-n \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ n-1 & x & 2 & & & \\ & n-2 & x & 3 & & \\ & & & \ddots & & n-1 \\ & & & & 1 & x \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21}+x_1 & \cdots & a_{2n}+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x_1 & \cdots & a_{nn}+x_n \end{vmatrix};$$

14. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ 及 $f(x)=ax^2+bx+c$ 其中 $a、b、c\in C$. 求证 $\det A=f(1)f(\omega)f(\omega^2)$. 其中 ω 是 1 的三次立方根.

15. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关($k\geqslant 2$). 求证必存在 k 个不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 对任一向量 β.

$\alpha_1+\lambda_1\beta,\alpha_2+\lambda_2\beta,\cdots,\lambda_k+\lambda_k\beta$ 总线性相关.

16. 整数环上的 n 阶方阵 A, $b=q/p$, q,p 为互素两整数. 且 $p\neq 1$. 求证线性方程组 $AX=bX$ 只有零解.

17. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系. 向量 β 使 $A\beta\neq 0$. 求证向量 $\beta+\alpha_1$. $\beta+\alpha_2$. $\cdots$. $\beta+\alpha_t$ 线性无关.

18. 设 $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ y & h & k \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} e & d & f \\ b & a & c \\ h & y & k \end{pmatrix}$.

问: A 与 B 是否等价? 合同? 相似?

19. $M=\begin{pmatrix} A & A \\ C-B & C \end{pmatrix}$. 其中 A,B,C 为 n 阶方阵.

求证: (1) M 可逆 $\Longleftrightarrow AB$ 可逆

(2) 若 M^{-1} 存在, 求 M^{-1}

20. 已知

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\text{求 }A^{-1}$$

21. 已知

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 2 & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2\end{pmatrix},\text{求 }A^{-1}$$

22. n 阶方阵 A，m 为正奇数，若 $A^m=0$，则 $E+A$ 非退化，并求 $(E+A)^{-1}$

23. 找一个坐标变换 $X=CY$，把二次型

$2x_1^2-2x_1x_2+5x_2^2-4x_1x_3+4x_3^2$，

和 $\frac{3}{2}x_1^2-2x_1x_3+3x_2^2-4x_2x_3+2x_3^2$

同时分别化简为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ 和 $u_1y_1^2+u_2y_2^2+u_3y_3^2$，其中 $u_1,u_2,u_3,\in R$.

24. 设 $A=\begin{pmatrix}B & G\\ G' & 0\end{pmatrix}$ 其中 B 为 n 阶正定阵，G 为 $n\times m$ 阵，且 $n\geqslant m$. 秩 $G=m$ 证明 A 有 n 个正特征根，m 个负特征根.

25. $n\times m$ 实阵 A 的秩为 m，B 为 n 阶正定阵，证明 $A'BA$ 是非退化的.

26. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 的矩阵 A 非退化.

求证 f 可用正交变换化成规范形 的充要条件是 A 为正交阵.

27. $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为 $2n$ 阶方阵,求正交阵 P 使 $P'AP=D$ 为对角阵.

28. 设

$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, 求正交阵 T 使 $T'AT$ 为对角阵.

29. 设

$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, 求正交阵 T 使 $T'AT$ 为对角阵.

30. 设 a,b 分别为 n 阶实对称阵 A 的最小,最大特征值. 求证 $bE-A$ 半正定.

31. 设

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求正交阵 T 使 $T^{-1}AT$ 为对角阵.

32. n 阶实对称阵 A,B 的特征值都是正数,A 的特征向量都是 B 的特征向量,则 AB 正定.

33. 二次型 $f(X')=X'AX$. 对 $\alpha=(a_1,\cdots,a_n)$. $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$有 $f(\alpha)>0$. $f(\beta)<0$. 求证. 存在两个线性无关的向量 $\eta=(u_1,\cdots,u_n)$与 $\gamma=(r_1,\cdots,r_n)$使 $f(\eta)=0,f(\gamma)=0$

34. n 阶方阵 A 的最后一个不变因子是 n 次的，则 A 的若当标准形中，不同若当块的对角线上的元素不同.

35. 证 qd 明可逆的对称阵 A 与其逆方阵合同.

36. 设矩阵. $A=\begin{pmatrix}1 & x & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & y & 1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 相似

求 x,y，并求正交阵 P 使 $P^{-1}AP=B$

37. 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 求证对任意实向量 X 有：

$\lambda_1 X'X\leqslant X'X\leqslant\lambda_n X'X$

38. 实二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$

求证 f 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 下的最大值恰为 A 的最大特征值.

39. 证明数域 P 上迹为 0 的 n 阶方阵的全体构成 $P^{n\times n}$ 的线性子空间，并求此子空间的维数和一组基.

40. 设 W 为 n 维线性空间 V 的非平凡子空间，求证存在无穷多个子空间 S_i，使 $V=W\oplus S_i$

41. 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)(n\geqslant 2)$. $B=A'A$

(1)求 B 的特征值.

(2)求 B 相似于对角阵的条件，并说明理由.

42. 设 V 为 n 阶实方阵线性空间，A 为 n 阶对称阵，定义 V 的线性变换 φ: $\forall X\in V$, $\varphi(X)=AX+XA$. 证明存在一组基使 φ 在这组基下的方阵是对角阵.

43. 设 $A=(a_{ij})$. 是 $n\times n$ 矩阵. 其中 $a_{ij}=\begin{cases}a & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

(1)求行列式 $\det A$ 的值.

(2)设 $W=\{X|AX=0\}$，求 W 的维数及 W 的一组基.

44. 设 n 维线性空间 R^n 的线性变换 φ 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵为对角阵，且对角线元素互不相同，求证：

(1)φ 的不变子空间有 2^n 个.

(2)W 是 φ 的不变子空间 $\Longleftrightarrow W$ 是由 $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$ 的一个子集生成.

45. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(1)求 $\mathrm{tr}A^k$

(2)证明 A 不相似于对角阵.

46. 线性空间 R^2. 线性变换 φ 在基 $\varepsilon_1=(1,0)$. $\varepsilon_2=(0.1)$ 下的矩阵为$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$W_1=L(\varepsilon_1)$ 证明：

(1)φ—W_1

(2)不存在 φ—W_2 使 $R^2=W_1\oplus W_2$

47. 实数 $\lambda\geqslant 0$ 是 $A\overline{A}$的特征值的充要条件是存在非零向量 X 使 $A\overline{X}=\sqrt{\lambda}X$. 这里 $\overline{A}$ 为 A 的共轭阵.

48. 复方阵 A 相似于对角阵 $B=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$的充要条件是对任意自然数 m. 有： 秩$(\lambda_iE-A)^m=$秩(λ_iE-A)

49. 任一 n 阶方阵可表为一个纯量阵与一个迹为 0 的阵之和.

50. P^3 的两组基

$$\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,1)\\ \varepsilon_2=(2,1,0);\\ \varepsilon_3=(1,1,1)\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(1,\ 2,-1)\\ \eta_2=(2,\ 2,-1)\\ \eta_3=(2,-1,\ 1)\end{cases}$$

定义线性变换 φ： $\varphi(\varepsilon_i)=\eta_i$

(1)写出由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 η_1,η_2,η_3 的过渡阵.

(2)写出 φ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

51. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=x^{12}+2x^{11}-2x^{10}-3x^9-2x^8+9x^6-4x^5x^4-6x^2+11x$,求

(1) A 的特征值　　(2) A^{-1} 的特征值.

(3) $f(A)$　　(4) $f(A)$ 的特征值

52. 在空间 P^n 中

(1)求证 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 为线性变换

(2)求 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 与 $\mathrm{Im}\,\varphi$ 的维数.

53. 求 $\begin{pmatrix}1 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2\end{pmatrix}$ 的若当标准形

54. 在 $C^{2\times2}$ 中,求线性变换 $AX=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}X$, $(X\in C^{2\times2})$ 的若当标准形.

55. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{pmatrix}$

求 A 的不变因子,初等因子,若当标准形.

56. 设 M 为全体 n 阶实对称阵的集合. 问 M 分别按等价关系,合同关系,相似关系各有多少类,并写出每一类的标准形.

57. 设 V 是三维欧氏空间. R_1 是在直角坐标系中绕 X 轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 的变换, R_2 是绕 y 轴顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 的变换.

(1)求变换 $R=R_1R_2$ 的旋转轴及转角

(2)以旋转轴为一个坐标轴建立新的直角坐标系,求新旧坐标系的坐标变换公式.

58. 设 V 是一个 n 维欧氏空间 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基,线性变换 φ 在此基下的矩阵 $A=(a_{ij})$

证明: $(\varphi(\alpha_i),\alpha_j)=a_{ij}$

59. 设 V 为 n 维欧氏空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为基底

证明:对于任意实数 $b_1,\cdots,b_n$. 恰有一个向量 $\beta\in V$.

使 $(\beta,\alpha_i)=b_i$, $i=1,2,\cdots,n$

60. 在 $P[x]_4$ 中定义内积 (f,g)

$=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)d(x)$, $f,g\in P[x]$,并定义线性变换 φ:

$\varphi(\varepsilon_i)=\eta_i$, $i=1,2,3,4$ 其中

$$\begin{cases}\varepsilon_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\\ \varepsilon_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\\ \varepsilon_3=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\\ \varepsilon_4=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\eta_1= 2x+x^2-x^3\\ \eta_2= -1-x^2+2x^3\\ \eta_3= -2x-x^2+x^3\\ \eta_4= 1-4x-x^2\end{cases}$$

试求 φ 的核的标准正交基.

61. 证明任一非奇异 n 阶方阵 A 可表为一正交阵与一上三角阵 R 的乘积, $A=QR$. 并对

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$ 算出相应的 Q 和 R.

62. W_1, W_2 为 n 维欧氏空间 V 的两个 m 维子空间, 求证: 存在正交变换 φ, 使 $\varphi(W_1)=W_2$

63. 在 R^4 中求由 $\alpha_1=(1,2,1,3)$, $\alpha_2=(4,-1,-5,-6)$ $\alpha_3=(1,-3,-4,-7)$ $\alpha_4=(2,1,-1,0)$ 生成的子空间 L 的正交补空间的一组基.

64. 设 α_i 表 n 阶实方阵 A 的第 i 列, $C=AA'$, 若 A 的列两两正交. 则 $|C|=(|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdots|\alpha_n|)^2$

65. 设 A 为正定阵, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots.\alpha_n,\beta$ 为 n 维欧氏空间 R^n 的列向量. 若已知 $\alpha_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$, β 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 都正交, 且 $\alpha_i'A\alpha_j=0$, $i\neq j$. 求证: $\beta=0$

66. 证明酉空间的线性变换 φ 是规范变换的充分必要条件是 $\varphi=\psi\tau$, 其中 ψ 是自共轭变换, τ 是酉变换, 且彼此可以交换.

67. 已知酉空间的线性变换 φ 可唯一的分解为 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, 其中 φ_1 是自共轭变换. φ_2 是反自共轭变换, 证明 φ 是规范的充分必要条件是 $\varphi_1\varphi_2=\varphi_2\varphi_1$.

68. 证明: 酉空间的线性变换 φ 是规范的充分必要条件是 φ 的每一特征向量也是 φ^* 的特征向量.

69. 证明两个正规阵酉相似的充分必要条件是它们的特征多项式相等.

70. 设 A 是正规阵，则 $\mathrm{Ker}\ A=\mathrm{Ker}\ \overline{A'}$，$\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(\overline{A'})$

页	行	错	正
112	7	二次型 …… 对称阵	实二次型 …… 实对称阵
77	13.19	P59 L3-4. P134 [illegible]	[illegible]
127	8,9 中间		将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 标准正交化为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,
	9	$Q=(\frac{\alpha_1}{\lvert\alpha_1\rvert},\frac{\alpha_2}{\lvert\alpha_2\rvert}\cdots,\frac{\alpha_n}{\lvert\alpha_n\rvert})$	$Q=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$
153	−10	$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\alpha+\bar{\beta}$,	$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=\overline{\alpha+\beta}$
167	6	看成 t 的多项式，有无限 t 使上式成立，因而它必是零多项式，	看成任给 λ 后 t 的多项式，有无限个 t 使上式成立，因而它必是恒等多项式，
191	10	$A\zeta=0$,	$A\xi=0$,
229	2	$\begin{pmatrix} & & \lambda_i \\ & \lambda_i \cdot \cdot 1 & \\ \lambda_i \cdot \cdot 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} & & \lambda_i \\ & \lambda_i \cdot \cdot 1 & \\ \lambda_i \cdot \cdot 1 & & \end{pmatrix}$
232	5	$J_m(0)\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$J_m(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$
	7	b_{1m-1}	
248	−1	同一内积空间	同一线性空间
256	−8	(6)	(6) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为基底,
262	3	T' 是正线三角矩阵．	T' 是正线下三角矩阵．
272	4,5,7	y_j	$\bar{y}_j$
273	12	$*(\alpha)$	$\psi*(\alpha)$
274	−3	$A\bar{A}'=Q\ B=\bar{A}'A$	$A\bar{A}'=Q\ B\ \bar{B}Q^{-1}=\bar{A}'A$
275	−5	$\varphi(\alpha_1)=\lambda_1\alpha_1$	$\varphi(\alpha_1)=\lambda_1\alpha_1$, $\lvert\alpha_i\rvert=1$
276	−6	$\overline{(Q^{-1}AQ)_H}=\overline{Q^{-1}\bar{A}'Q}$	$\overline{(Q^{-1}AQ)'}=Q^{-1}\bar{A}'Q$
284	−1		
285	1	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
290	12	$=\bar{\lambda}\,\overline{\lambda\varepsilon'}\,\varepsilon$	$=\lambda\,\overline{\lambda\varepsilon'}\,\varepsilon$

[General Information]
书名=高等代数分析与研究
作者=王正文编著
页数=354
SS号=12023310
出版日期=1994.8